Н. Макарычев
Н. Г. Миндюк
К. И. Нешков
Е. Феоктистов

# АЛГЕБРА

# 9

*Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений*

*7-е издание, исправленное и дополненное*

*Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации*

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2008

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
М15

**На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106–5215/9 от 31.10.2007)
и Российской академии образования (№ 01–658/5/7д от 29.10.2007)**

**Макарычев Ю. Н.**

М15 Алгебра. 9 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. — 7-е изд., испр. и доп. — М. : Мнемозина, 2008. — 447 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01043-2

Данный учебник предназначен для углубленного изучения алгебры в 9 классе и входит в комплект из трех книг: «Алгебра–7», «Алгебра–8» и «Алгебра–9». Его содержание полностью соответствует современным образовательным стандартам, а особенностями являются расширение и углубление традиционных учебных тем за счет теоретико-множественной, вероятностно-статистической и историко-культурной линий. В учебнике представлен большой набор разнообразных по тематике и уровню сложности упражнений.

Главы 1, 5, 7 написаны Ю. Н. Макарычевым; главы 2, 4 — Н. Г. Миндюк; главы 3, 6 — К. И. Нешковым; исторические сведения, методический комментарий для учителя, ряд упражнений развивающего характера — И. Е. Феоктистовым.

**УДК 373.167.1:512**
**ББК 22.141я721+22.14я721.6**

**ISBN 978-5-346-01043-2**

## Предисловие для учащихся

Дорогие девятиклассники! В этом учебном году вы сдаете выпускной экзамен по алгебре за курс основной средней школы. На уроках математики вам предстоит не только познакомиться с целым рядом новых тем, но также повторить весь пройденный ранее материал. В конце учебного года вам нужно будет сделать выбор: продолжить образование в профессиональных училищах, колледжах или в общеобразовательных учебных заведениях. Причем если вы решите продолжать образование в школе, лицее или гимназии, то вам нужно будет выбрать профиль класса, в котором вы будете учиться.

Учебник алгебры отчасти поможет вашему выбору: изучать ли математику по программе углубленного или по программе общеобразовательного курса. Чтобы показать особенности профильного и углубленного изучения математики в старших классах, в учебнике алгебры для 9-го класса значительно больше внимания уделяется теоретическим положениям. И хотя в объяснительных текстах все еще довольно редко встречаются непривычные для школьного курса алгебры слова «теорема», «доказательство», тем не менее в учебнике многие утверждения либо доказаны полностью, либо эти доказательства предлагается выполнить самостоятельно. Авторы надеются, что такой подход поможет вам выбрать специализацию.

Данный учебник предназначен для углубленного изучения математики. В нем представлен большой набор разнообразных по тематике и уровню сложности упражнений.

Авторы надеются, что изучение алгебры по этому учебнику будет для вас интересным и полезным, позволит увидеть алгебру не только как учебный школьный предмет, но и как средство развития своих способностей, поможет рассматривать математику как часть общечеловеческой культуры.

# ГЛАВА 1 ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

## § 1. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

### 1. Возрастание и убывание функций

На рисунке 1 изображен график некоторой функции $y = f(x)$, область определения которой — промежуток $[-5; 4]$.

При возрастании значений $x$ от $-5$ до 1 значения $y$ возрастают, а при возрастании значений $x$ от 1 до 4 значения $y$ убывают. Говорят, что функция $y = f(x)$ на промежутке $[-5; 1]$ возрастает, а на промежутке $[1; 4]$ — убывает. При $x = 1$ функция принимает наибольшее значение, равное 4, а при $x = -5$ — наименьшее значение, равное $-2$.

Определение. **Функция $f$ называется возрастающей на множестве $X$, если для любых двух значений аргумента $x_1$ и $x_2$ множества $X$, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.**

**Функция $f$ называется убывающей на множестве $X$, если для любых двух значений аргумента $x_1$ и $x_2$ множества $X$, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.**

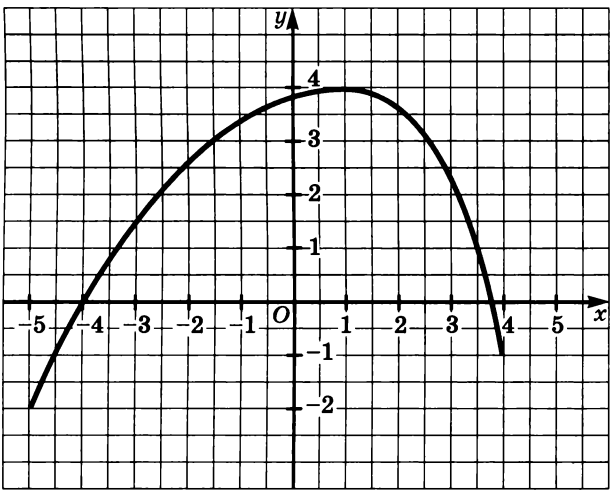



Рис. 1

Иногда пользуются более краткими формулировками.

**Функция $f$ называется возрастающей (убывающей) на множестве $X$, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.**

**Если на всей области определения функция возрастает, то ее называют возрастающей функцией, а если убывает, то — убывающей функцией.**

**Функцию, возрастающую на множестве $X$ или убывающую на множестве $X$, называют монотонной функцией на множестве $X$.**

*Замечание.* Если функция $f$ возрастает (убывает) на множестве $X_1$ и возрастает (убывает) на множестве $X_2$, то нельзя сделать вывод о том, что функция $f$ возрастает (убывает) на множестве $X_1 \cup X_2$. Чтобы показать это, достаточно привести пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ где } x \neq 1, \\ 9, \text{ где } x = 1 \end{cases}$$

возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 1]$ и $(1; +\infty)$, но не является возрастающей на множестве $(-\infty; +\infty)$. Почему? Объясните это.

Выясним характер монотонности некоторых видов функций.

*Линейная функция, т. е. функция, заданная формулой $f(x) = kx + b$, при $k > 0$ является возрастающей, а при $k < 0$ — убывающей* (рис. 2).

Доказательство. Пусть $x_1$ и $x_2$ — два произвольных значения аргумента, причем $x_2 > x_1$ и $k > 0$. Умножим обе части неравенства $x_2 > x_1$ на положительное число $k$ и прибавим к обеим частям получившегося неравенства число $b$. Тогда по свойствам числовых неравенств получим верные неравенства

$$kx_1 > kx_1 \text{ и } kx_2 + b > kx_1 + b.$$

Значит, $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. при $k > 0$ функция $f$ — возрастающая.

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что при $k < 0$ функция $f$ является убывающей.

*Степенная функция $f(x) = x^n$ с натуральным показателем $n$ при четном $n$ возрастает на промежутке* $[0; +\infty)$ *и убывает на промежутке* $(-\infty; 0]$. *При нечетном $n$ функция $f(x) = x^n$ возрастает на всей области определения, т. е. на промежутке* $(-\infty; +\infty)$ (рис. 3, 4).

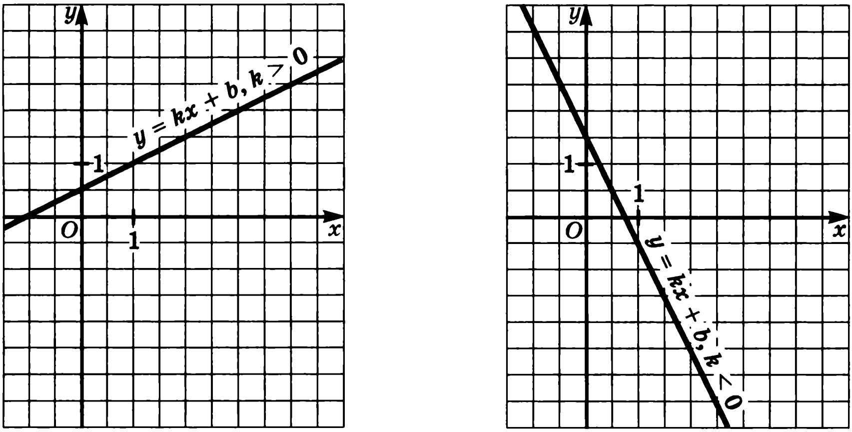



**Рис. 2**

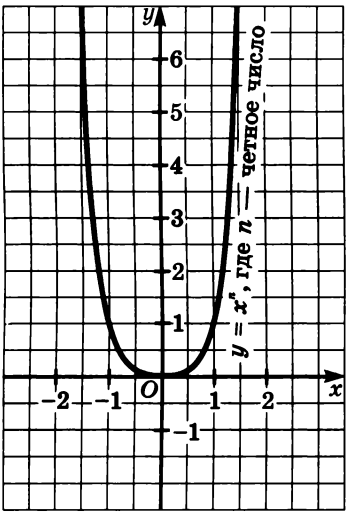



**Рис. 3**

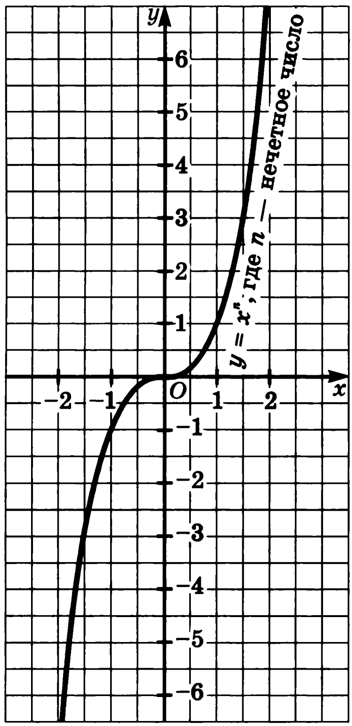



**Рис. 4**

Рассмотрим сначала функцию $f(x) = x^n$ с четным показателем $n$.

Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Перемножим почленно $n$ одинаковых неравенств $x_2 > x_1$. Получим $x_2^n > x_1^n$.

Следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. на множестве $[0; +\infty)$ функция $f$ возрастает.

Выясним теперь характер монотонности функции $f(x) = x^n$, где $n$ — четное число, на промежутке $(-\infty; 0]$.

Пусть $x_1 < x_2 \leqslant 0$. Тогда

$$-x_1 > -x_2 \geqslant 0.$$

Так как числа $-x_1$ и $-x_2$ положительные, то, по доказанному выше, $(-x_1)^n > (-x_2)^n$. Но $n$ — четное число, поэтому $(-x_1)^n = x_1^n$ и $(-x_2)^n = x_2^n$. Значит, $x_1^n > x_2^n$, т. е. $x_2^n < x_1^n$. Полученное неравенство означает, что $f(x_2) < f(x_1)$, т. е. функция $f$ при четном $n$ на промежутке $(-\infty; 0]$ убывает.

Рассмотрим теперь функцию $f(x) = x^n$ с нечетным показателем $n$.

*Если $x_2 > x_1 \geqslant 0$, то проведенное рассуждение для четного $n$* сохраняет силу и для нечетного показателя.

Значит, функция $f$ с нечетным показателем на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает.

Если $x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Кроме того,

$$(-x_1)^n = -x_1^n, \quad (-x_2)^n = -x_2^n,$$

так как $n$ — нечетное число. По доказанному выше свойству функции $f$ с нечетным показателем, для промежутка $[0; +\infty)$ выполняется неравенство $(-x_1)^n > (-x_2)^n$. Отсюда имеем:

$$-x_1^n > -x_2^n, \quad x_2^n > x_1^n.$$

Это означает, что функция $f$ при нечетном $n$ на промежутке $(-\infty; 0]$ возрастает.

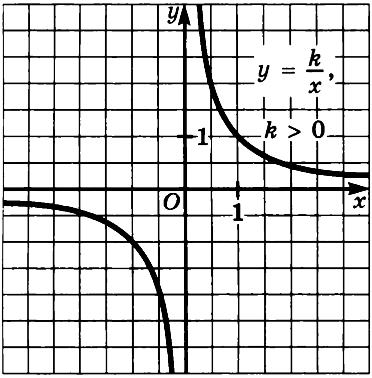
Если $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ и $n$ — нечетное число, то $x_1^n < 0$ и $x_2^n > 0$, т. е. и в этом случае из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $x_2^n > x_1^n$.

Таким образом, при нечетном $n$ функция $f(x) = x^n$ возрастает на всей области определения.

*Обратная пропорциональность, т. е. функция $f(x) = \dfrac{k}{x}$ в каждом из промежутков* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *при* $k > 0$ *убывает, а при* $k < 0$ *возрастает* (рис. 5).

Рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1)$, где $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, и преобразуем ее:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1 - kx_2}{x_1x_2} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1x_2} = -k \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}.$$



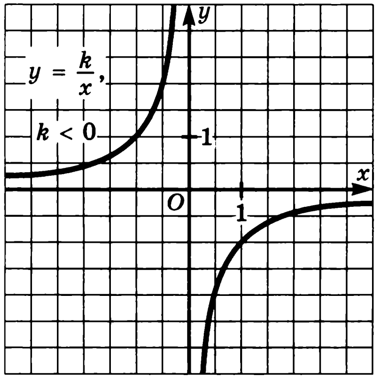




**Рис. 5**

Если $x_2 > x_1 > 0$ или $x_1 < x_2 < 0$, то в любом из этих случаев $x_2 - x_1 > 0$ и $x_1x_2 > 0$. Значит, дробь $\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}$ является положительным числом, а выражение $-k \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}$ является отрицательным числом при $k > 0$ и положительным числом при $k < 0$. Следовательно,

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ при } k > 0 \text{ и } f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ при } k < 0,$$

т. е. $f(x_2) < f(x_1)$ при $k > 0$ и $f(x_2) > f(x_1)$ при $k < 0$. Значит, функция $f$ при $k > 0$ в каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ убывает, а при $k < 0$ в каждом из этих промежутков возрастает.

Однако функция $f(x) = \frac{k}{x}$ не является монотонной на всей области определения. Докажите это.

*Функция* $f(x) = \sqrt{x}$ *возрастающая* (рис. 6).

Выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл лишь при $x \geqslant 0$.

Поэтому $D(f) = [0; +\infty)$.

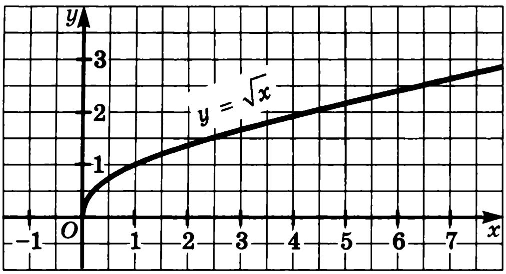



**Рис. 6**

Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1)$ и преобразуем ее:

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

Числитель и знаменатель дроби $\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}$ — положительные числа. Это следует из того, что $x_2 > x_1 \geqslant 0$, $\sqrt{x_2} > 0$ и $\sqrt{x_1} > 0$. Значит, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$. Поэтому функция $f$ возрастающая.

**1.** Какая из функций является возрастающей, какая — убывающей, если:

а) $y = 5x - 8$; в) $y = \frac{6}{x}$; д) $y = x^2$, где $x \geqslant 0$;

б) $y = -3x + 7$; г) $y = -\frac{10}{x}$; е) $y = x^2$, где $x \leqslant 0$?

**2.** Докажите, что функция $y = |x|$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

**3.** Графиком функции $g$ является ломаная $ABC$, где $A(-1; -2)$, $B(2; 5)$, $C(6; 2)$. Постройте график этой функции и найдите промежутки, на которых функция $g$ возрастает и на которых она убывает.

**4.** Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x < 0, \\ 1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2, \text{ если } 1 < x \leqslant 2, \\ -x + 6, \text{ если } 2 < x \leqslant 6. \end{cases}$$

Укажите область определения и область значений функции. Найдите промежутки, на которых функция $f$

а) убывает;

б) возрастает;

в) сохраняет постоянное значение.

**5.** При каких значениях $a$ функция

а) $y = (5a - 2)x + 16$ является возрастающей;

б) $y = (1 - 3a)x - 21$ является убывающей;

в) $y = \frac{7 - 2a}{x}$ является возрастающей на промежутке $(0; +\infty)$;

г) $y = \frac{a^2}{x}$ является убывающей на промежутке $(0; +\infty)$?

**6.** Докажите, что функция

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 1, \text{ если } x \leqslant -1, \\ -x + 2, \text{ если } x > -1 \end{cases}$$

является монотонной.

**7.** Докажите, что функция

а) $f(x) = \frac{5}{4 - x}$ возрастает на промежутке $(4; +\infty)$;

б) $g(x) = \frac{4}{3x + 1}$ убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

**8.** Найдите нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = |x - 3| - 1$;
б) $y = 4 - |x + 2|$;
в) $y = x^2 - 4$;
г) $y = x^{-2}$.

**9.** Является возрастающей или убывающей функция:

а) $\varphi(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}$;
б) $g(x) = 6x - |3x - 2| - |2x + 5|$?

**10.** Известно, что функция $y = f(x)$ является возрастающей на промежутке $[a; b]$. Докажите, что функция $y = f(x) + n$ является возрастающей на этом промежутке.

**11.** Целой частью числа $x$ называется наибольшее целое число, не превосходящее $x$ (обозначается $[x]$), а дробной частью числа $x$ называется разность между числом $x$ и его целой частью (обозначается $\{x\}$). Например, $[5, 3] = 5$, $\{5, 3\} = 0{,}3$; $[-5, 3] = -6$, $\{-5, 3\} = 0{,}7$. На рисунках 7 и 8 построены графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$. Каковы области определения каждой из функций? Рассмотрите эти функции на промежутке и найдите для каждой из них: нули функций, промежутки, в которых $y < 0$, $y > 0$, промежутки возрастания и убывания, промежутки, на которых функция сохраняет постоянное значение.

**12.** Изобразите схематически график функции, укажите область определения и область значений функции и выясните, является ли функция возрастающей или убывающей:

а) $y = \sqrt{x - 4} + 2$;
б) $y = \sqrt{x + 3} - 1$.

**13.** Изобразите схематически график функции $y = \frac{6 - x}{6 + x}$. Укажите для этой функции промежутки монотонности и определите характер монотонности для каждого промежутка.

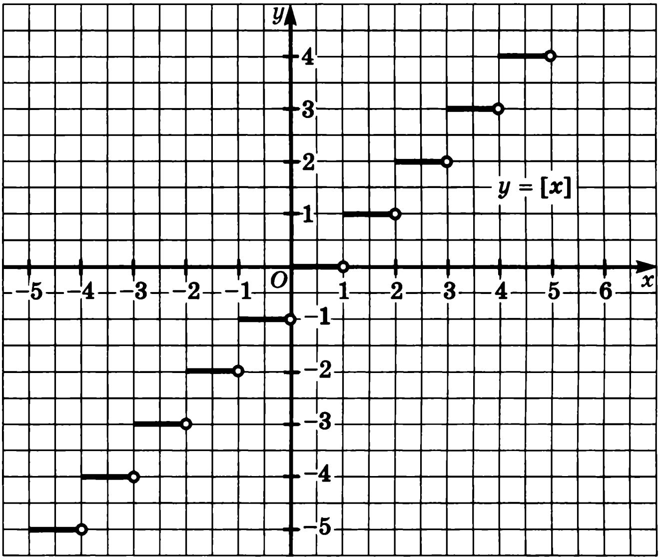



Рис. 7

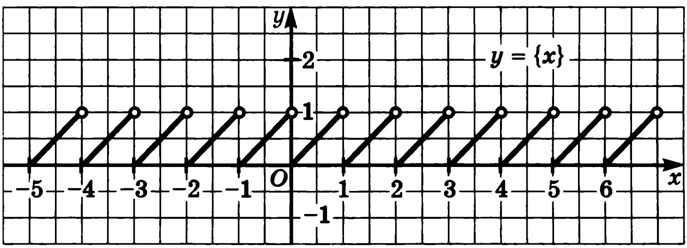



Рис. 8

## Упражнения для повторения

**14.** Выполните деление многочлена на двучлен:

а) $(x^3 - x^2 - x + 10) : (x + 2)$;

б) $(2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 4x + 5) : (2x + 3)$.

**15.** Докажите, что при неотрицательных значениях $a$ и $b$ верно неравенство $(a + 1)(b + 1)(ab + 1) \geqslant 8ab$.

**16.** Решите неравенство:

а) $28 - 6x < x$; б) $\dfrac{4x - 7}{2\sqrt{6} - 5} < 5 + 2\sqrt{6}$.

## 2. Свойства монотонных функций

Рассмотрим некоторые свойства монотонных функций.

1. ***Монотонная функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента.***

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ — произвольная монотонная функция (возрастающая или убывающая). Тогда при любых $x_1$ и $x_2$, принадлежащих области определения функции $f$, и таких, что $x_2 > x_1$, выполняется либо неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, если функция возрастающая, либо неравенство $f(x_2) < f(x_1)$, если функция убывающая. Поэтому равенство $f(x_1) = f(x_2)$, где $x_1 \neq x_2$, невозможно.

Это легко увидеть на графике любой монотонной функции $y = f(x)$. Любая прямая может пересечь график функции $y = f(x)$ лишь в одной точке.

Отсюда следует, что *уравнение $f(x) = a$, где $f$ — монотонная функция и $a$ — произвольное число, имеет не более одного корня.*

2. ***Если функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей), то функция $y = -f(x)$ является убывающей (возрастающей).***

Доказательство. Пусть $f$ — возрастающая функция и $x_2 > x_1$. Тогда $f(x_2) > f(x_1)$. Отсюда следует, что $-f(x_2) < -f(x_1)$, т. е. функция $y = -f(x)$ убывающая.

Аналогично можно доказать, что если функция $y = f(x)$ убывающая, то функция $y = -f(x)$ возрастающая.

3. ***Сумма двух возрастающих функций является возрастающей функцией, а сумма двух убывающих функций является убывающей функцией.***

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, где $D(\varphi) = D(f) \cap D(g)$, и пусть $x_1$ и $x_2$ принадлежат области определения функции $\varphi$, причем $x_2 > x_1$. Рассмотрим разность $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ и преобразуем ее. Получим

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = f(x_2) + g(x_2) - (f(x_1) + g(x_1)) = \\ = f(x_2) - f(x_1) + (g(x_2) - g(x_1)).$$

Если $f$ и $g$ — возрастающие функции, то $f(x_2) > f(x_1)$ и $g(x_2) > g(x_1)$. Значит, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и $g(x_2) - g(x_1) > 0$. Отсюда следует, что $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) > 0$, т. е. $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$ и $\varphi$ — возрастающая функция.

Если $f$ и $g$ — убывающие функции, то $f(x_2) < f(x_1)$ и $g(x_2) < g(x_1)$. Значит, $f(x_2) - f(x_1) < 0$ и $g(x_2) - g(x_1) < 0$.

Следовательно, $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) < 0$ и $\varphi(x_2) < \varphi(x_1)$, т. е. $\varphi$ — убывающая функция.

Из свойств 1—3 следует, что *если одна из функций $f$ или $g$ является возрастающей, а другая — убывающей, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.* (Докажите это сами.)

Иногда приходится рассматривать функции, у которых аргумент, в свою очередь, является функцией. Такие функции называют *сложными функциями* (или *композицией функций*).

Пусть, например, $f(u) = \sqrt{u}$, а $u = g(x) = x^2 - 1$. Тогда, подставляя в формулу $f(u) = \sqrt{u}$ вместо аргумента $u$ функцию $g(x)$, получим $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.

4. ***Если обе функции $f$ и $g$ возрастающие или обе убывающие, то функция $\varphi(x) = f(g(x))$ — возрастающая функция.***

Доказательство. Пусть $x_1$ и $x_2$ — любые значения аргумента, принадлежащие области определения функции $\varphi$ и $x_2 > x_1$.

Если $f$ и $g$ — возрастающие функции, то верно неравенство $g(x_2) > g(x_1)$, а потому верно также неравенство

$$f(g(x_2)) > f(g(x_1)),$$

т. е. $\varphi$ — возрастающая функция.

Если $f$ и $g$ — убывающие функции, то верно неравенство $g(x_2) < g(x_1)$ и, значит, верным является также неравенство $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, а это означает, что и в этом случае функция $\varphi$ также является возрастающей.

Свойство 4 иногда формулируют так: *композиция двух функций одинакового характера монотонности является возрастающей функцией.*

5. ***Если функция $y = f(x)$ монотонна на множестве $X$ и сохраняет на этом множестве знак, то функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ на множестве $X$ имеет противоположный характер монотонности.***

Доказательство. Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$. Рассмотрим разность $g(x_2) - g(x_1)$ и преобразуем ее:

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) \cdot f(x_1)}.$$

Знаменатель полученной дроби — положительное число, так как оба множителя $f(x_1)$ и $f(x_2)$, по условию, одного знака.

Числитель дроби $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) \cdot f(x_1)}$ — отрицательное число, если функция $f$ возрастающая, и положительное число, если функция $f$

убывающая. Отсюда следует, что $g(x_2) < g(x_1)$, если $f$ — возрастающая функция, и $g(x_2) > g(x_1)$, если $f$ — убывающая функция.

Приведем примеры использования свойств монотонных функций.

Пример 1. Выясним, в скольких точках прямая $y = 9$ пересекает график функции $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x+13}$.

Функции $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{x+6}$ и $y = \sqrt{x+13}$ — возрастающие функции (свойство 4). Сумма возрастающих функций — возрастающая функция (свойство 3). А возрастающая функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента (свойство 1). Следовательно, если прямая имеет общие точки с графиком функции $f$, то только одну точку.

Подбором можно найти, что $f(x) = 9$ при $x = 3$. Значит, прямая пересекает график функции $f$ в точке $M(3; 9)$.

Пример 2. Выясним характер монотонности функции $f(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3}$.

Область определения функции:

$$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty).$$

В каждом из промежутков $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ и $(3; +\infty)$ функции $y = x + 3$ и $y = x - 3$ сохраняют знак и являются возрастающими. Следовательно, по свойству 5, функции $y = \frac{1}{x+3}$ и $y = \frac{1}{x-3}$ в этих промежутках являются убывающими. Сумма убывающих функций (свойство 2) является убывающей функцией. Поэтому функция $f$ в каждом из промежутков $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ и $(3; +\infty)$ убывает.

На рисунке 9 показан примерный график функции $f$.

Пример 3. Докажем, что функция $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Функция $f$ определена на множестве действительных чисел, кроме нуля.

Преобразуем выражение $\frac{x^2 - 3x - 1}{x}$:

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} - \frac{1}{x} = x - 3 - \frac{1}{x}.$$

Значит, $f(x) = x - 3 - \frac{1}{x}$.

Функцию $f$ можно рассматривать как сумму двух функций $y = x - 3$ и $y = -\frac{1}{x}$. Каждая из них является возрастающей функцией на указанных промежутках.

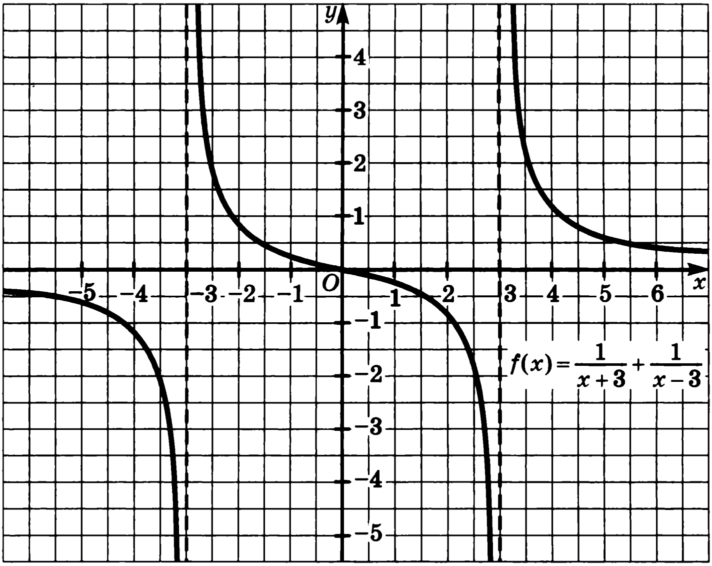



**Рис. 9**

По свойству 3, сумма двух возрастающих функций на общей области определения — возрастающая функция. Следовательно, на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $f$ возрастает.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt{x} = 0.$$

Легко видеть, что $x = 1$ — корень уравнения. Покажем, что других корней это уравнение не имеет. Действительно, область определения функции $y = x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt{x}$ — множество положительных чисел. На этом множестве функция возрастает, так как каждая из функций $y = x^3$, $y = -\frac{2}{x}$ и $y = \sqrt{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$ возрастает. Следовательно, данное уравнение других корней, кроме $x = 1$, не имеет.

**17.** Докажите, что функция $g$ является убывающей функцией, если:

а) $g(x) = \frac{1}{10x + 5}$, где $x > -\frac{1}{2}$;

б) $g(x) = \frac{1}{x^2}$, где $x > 0$;

в) $g(x) = \sqrt{2 - x}$;

г) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

**18.** Докажите, что функция $f$ является возрастающей функцией, если:

а) $f(x) = \frac{1}{7-x}$, где $x < 7$;

б) $f(x) = (x-2)^2$, где $x > 2$;

в) $f(x) = x|x|$;

г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

**19.** Докажите, что функция $f$ возрастающая, если:

а) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$;

б) $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+2}$, где $x > -2$;

в) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$;

г) $f(x) = \frac{x+4}{2-x}$, где $x > 2$.

**20.** Даны функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2x - 1$. Задайте формулой функцию: а) $y = f(g(x))$; б) $y = g(f(x))$.

**21.** Функция $y = f(g(x))$ задана формулой. Укажите функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, если:

а) $y = |x^2 - 2x - 3|$;

б) $y = x + 2\sqrt{x-3}$;

в) $y = x^2 - |x|$;

г) $y = (2x-1)^3 - 1$.

**22.** Докажите, что если $f$ — убывающая функция, а $g$ — возрастающая функция, то $y = f(g(x))$ — убывающая функция.

Что в этом случае можно сказать о функции $\varphi(x) = g(f(x))$? Сформулируйте свойство композиции двух функций с разным характером монотонности.

**23.** Даны функции $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = 2 - x$. Задайте формулой функцию: а) $y = f(g(x))$; б) $y = g(f(x))$. Определите характер монотонности каждой из полученных функций.

**24.** Определите характер монотонности функции:

а) $y = \sqrt{-2x}$;

б) $y = -\sqrt{x-5}$;

в) $y = \frac{1}{x+2} - \sqrt{x}$;

г) $y = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}}$;

д) $y = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4}$;

е) $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

**25.** Докажите, что $g$ — возрастающая функция, если:

а) $g(x) = \frac{x^2+2x-6}{x}$, где $x > 0$;

б) $g(x) = \frac{x^2-4x-5}{x-2}$, где $x > 2$.

**26.** Докажите, что $f$ — убывающая функция, если:

а) $f(x) = \dfrac{1 + 5x - x^2}{x}$, где $x > 0$;

б) $f(x) = \dfrac{10 + 6x - 2x^2}{x - 3}$, где $x < 3$.

**27.** Докажите, что функция $y = x^2 + |x| + \sqrt{x} + 2x - 3$ является возрастающей функцией.

Подберите значение аргумента $x$, при котором:

а) $y = 27$; б) $y = 108$.

**28.** Решите уравнение:

а) $x^5 + x^3 + x = -42$; б) $x^2 + \sqrt{x} - \dfrac{12}{x} = 15$.

**29.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x - y} + (x - y)^3 = 2, \\ x^2 - 6y + 1 = 0. \end{cases}$$

## Упражнения для повторения

**30.** Укажите промежутки возрастания и промежутки убывания функции:

а) $y = x^6$; б) $y = x^9$; в) $y = |x - 5|$; г) $y = |x + 5|$.

**31.** Докажите, что значение выражения $(a + b)^2 - 2(a + b - 1)$ при любых $a$ и $b$ является неотрицательным числом.

**32.** Упростите выражение $\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$, если $x = 2\sqrt{a - 1}$, и найдите его значение:

а) при $a = 1{,}5$; б) при $a = 3{,}87$.

## 3. Четные и нечетные функции

Вам известны свойства степенных функций $f(x) = x^n$ с целым показателем.

Если $n$ — четное число, то любым противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции, т. е. для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$.

Если $n$ — нечетное число, то любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции, т. е. для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Существует целый ряд различных функций (не только степенных с целым показателем), которые обладают такими же свойствами. Эти функции получили специальное название.

Определение. **Функция $f$ называется четной, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. Функция $f$ называется нечетной, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$.**

Выполнение равенств $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$ означает, что если $x_0$ принадлежит области определения функции $f$, то $-x_0$ также принадлежит области определения функции $f$. В таких случаях говорят, что область определения функции есть *множество, симметричное относительно нуля.*

Если область определения некоторой функции не является множеством, симметричным относительно нуля, то эта функция не относится к классу четных или нечетных функций. Например, функция $\varphi(x) = \frac{x}{x+2}$ не является ни четной, ни нечетной функцией, так как ее область определения есть множество $(-\infty; -2) \cup \cup (-2; +\infty)$, несимметричное относительно нуля. В этом случае выражение $\varphi(2)$ имеет смысл ($\varphi(2) = \frac{1}{2}$), а выражение $\varphi(-2)$ не имеет смысла.

Чтобы доказать, что данная функция $f$ является четной или нечетной, достаточно показать выполнимость, соответственно, равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$. Если ни одно из этих равенств не выполняется, то функция $f$ не является ни четной, ни нечетной. Определить, что рассматриваемая функция не является четной или нечетной, можно и иначе. Для этого достаточно показать, что $D(f)$ есть множество, несимметричное относительно нуля (как в примере с функцией $\varphi(x) = \frac{x}{x+2}$).

Приведем примеры четных и нечетных функций. Функция, заданная формулой $f(x) = 7x^4 - 5x^2 + 1$, — четная функция, так как

$$f(-x) = 7(-x)^4 - 5(-x)^2 + 1 = 7x^4 - 5x^2 + 1 = f(x),$$

т. е. для любого $x$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Функция, заданная формулой $g(x) = \frac{5}{x^3 - x}$, является нечетной функцией. Действительно,

$$g(-x) = \frac{5}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{5}{-x^3 + x} = -\frac{5}{x^3 - x} = -g(x),$$

т. е. для любого $x \in D(g)$ верно равенство $g(-x) = -g(x)$.

Пример 1. Докажем, что функция $g(x) = |x + 3| + |x - 3|$ четная, а функция $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$ нечетная.

Имеем:

$$g(-x) = |-x + 3| + |-x - 3| = |-(x - 3)| + |-(x + 3)| =$$
$$= |x - 3| + |x + 3| = g(x),$$

т. е. $g$ — четная функция;

$$f(-x) = |-x + 2| - |-x - 2| = |-(x - 2)| - |-(x + 2)| =$$
$$= |x - 2| - |x + 2| = -(|x + 2| - |x - 2|) = -f(x),$$

т. е. $f$ — нечетная функция.

Вы знаете, что график степенной функции с четным показателем симметричен относительно оси $y$, а график степенной функции с нечетным показателем симметричен относительно точки (0; 0). Такими же свойствами обладают и графики любых четных и нечетных функций.

***График четной функции f симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.***

Докажем это. Если $(x_0; y_0)$ — произвольная точка графика четной или нечетной функции $y = f(x)$, то верно равенство $y_0 = f(x_0)$ и $-x_0 \in D(f)$, так как область определения четной или нечетной функции — множество, симметричное относительно нуля.

Если $f$ — четная функция, то $f(-x_0) = f(x_0) = y_0$. Значит, точка $(-x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $f$. Но точки $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; y_0)$ симметричны относительно оси $y$ (рис. 10). Следовательно, каждой точке $(x_0; y_0)$ соответствует точка $(-x_0; y_0)$, симметричная относительно оси $y$, и наоборот. Значит, график четной функции симметричен относительно оси ординат.

Если $f$ — нечетная функция, то $f(-x_0) = -f(x_0) = -y_0$. Значит, точка $(-x_0; -y_0)$ принадлежит графику функции $f$. Так как точки $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; -y_0)$ симметричны относительно начала координат (рис. 11) и каждой точке $(x_0; y_0)$ соответствует точка $(-x_0; -y_0)$,

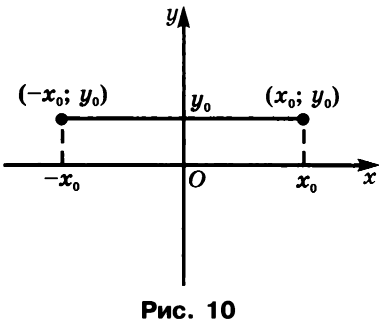


Рис. 10

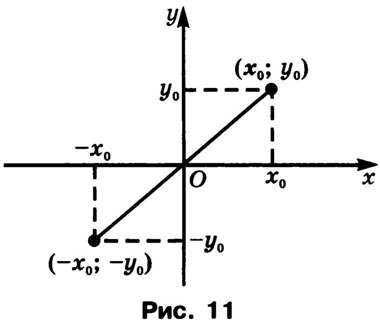


Рис. 11

симметричная относительно начала координат, и наоборот, то график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Заметим, что если функция $f$ нечетная и определена на множестве действительных чисел (или, по крайней мере, определена в нуле), то ее график проходит через начало координат. Действительно, выражение $f(0)$ имеет смысл. Пусть $f(0) = a$. Число $a$ не может быть числом, отличным от нуля, так как, допустив, что $a \neq 0$, мы получим, что график функции $f$ (который симметричен относительно начала координат) пересекает ось ординат в двух точках: $(0; a)$ и $(0; -a)$, т. е. что $f(0) = a$ и $f(0) = -a$. Но этого быть не может, так как, согласно определению функции, каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции.

Пример 2. Пусть $f$ — нечетная функция, областью определения которой является множество действительных чисел. Зная, что уравнение $f(x) = 0$ имеет только один положительный корень — число 3, найдем остальные корни этого уравнения.

Так как функция $f$ нечетная, то $f(-3) = -f(3)$. Но 3 — корень уравнения $f(x) = 0$. Значит, $f(3) = 0$, поэтому и $f(-3) = 0$, т. е. $-3$ также является корнем уравнения. Согласно условию других, кроме числа 3, положительных корней уравнение не имеет. Значит, оно не имеет и других, кроме числа $-3$, отрицательных корней. Выясним теперь, не является ли корнем уравнения число 0. Так как функция $f$ нечетная и определена на множестве всех действительных чисел, то ее график проходит через начало координат, т. е. $f(0) = 0$. Значит, число 0 также является корнем уравнения.

Итак, уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня: $-3$, 0 и 3.

**33.** Среди множеств $A = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $B = (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$, $C = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$, $D = [-2; 2]$ выберите те, которые симметричны относительно нуля.

**34.** Докажите, что функция $f$ четная, если:

а) $f(x) = x^4 - 7x^2$; в) $f(x) = 5|x|$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{x^{10}}$; г) $f(x) = (x - 7)(x + 5) + 2x$.

**35.** Докажите, что функция $g$ нечетная, если:

а) $g(x) = x^7 - x^3$; в) $g(x) = (x - 5)^2 - (x + 5)^2$;

б) $g(x) = \dfrac{1}{x^9 + x}$; г) $g(x) = |x + 7| - |x - 7|$.

**36.** Докажите, что функция $h$ не является ни четной, ни нечетной:

а) $h(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{3x - 1}$; в) $h(x) = \dfrac{|x| + 1}{x^3 - 1}$;

б) $h(x) = \dfrac{2x - 1}{3x^2 - 3}$; г) $h(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$.

**37.** Является ли четной или нечетной функция, заданная формулой:

а) $\varphi(x) = \dfrac{8}{x^2 - 3}$; г) $\varphi(x) = x^2$, где $-1 \leqslant x \leqslant 2$;

б) $\varphi(x) = \dfrac{9}{7x}$; д) $\varphi(x) = x^3 + x$, где $-3 \leqslant x \leqslant 1$;

в) $\varphi(x) = |x - 2|$; е) $\varphi(x) = x^4$, где $x \in (-5; -1] \cup [1; 5)$?

**38.** Известно, что $f(x) = x^8 + ax^4 + 1$ и $f(2) = 305$. Найдите $f(-2)$ и значение коэффициента $a$.

**39.** Зная, что $g(x) = \dfrac{15\,552}{x^5 + bx^3}$ и $g(3) = 16$, найдите $g(-3)$ и значение коэффициента $b$.

**40.** Существуют ли такие значения коэффициентов $k$ и $b$, при которых линейная функция $y = kx + b$ является

а) четной; б) нечетной; в) четной и нечетной?

**41.** Постройте график функции $f$, зная, что $f$ — четная функция и ее значения при $x \geqslant 0$ могут быть найдены по формуле:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \sqrt{x}$; в) $f(x) = |x - 3|$; г) $f(x) = x - 2$.

**42.** Постройте график функции $g$, если известно, что функция $g$ нечетная и ее значения при $x \geqslant 0$ могут быть найдены по формуле:

а) $g(x) = x^2$; б) $g(x) = \sqrt{x}$; в) $g(x) = |x - 2| - 2$; г) $g(x) = x - 3$.

**43.** Известно, что функция $\varphi$ четная и что она обращается в нуль при $x = -2$ и $x = 3$. Существуют ли какие-либо другие значения аргумента, при которых $\varphi(x) = 0$?

**44.** Зная, что $f$ — нечетная функция и что ее нулями являются числа $-5$ и $2$, укажите какие-нибудь другие нули этой функции, если $0 \in D(f)$.

**45.** Зная, что график функции $f$ проходит через точки $A(2; 9)$ и $B(3; 5)$, укажите другие точки графика этой функции, если:

а) $f$ — четная функция; б) $f$ — нечетная функция.

**46.** Известно, что уравнение $\varphi(x) = 0$, где $\varphi$ — нечетная функция с областью определения $\boldsymbol{R}$, имеет два положительных корня 8 и 17. Найдите неположительные корни этого уравнения.

**47.** Докажите, что если $\varphi$ — произвольная функция, где $D(\varphi)$ — множество, симметричное относительно нуля, то:

а) $f(x) = \dfrac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}$ — четная функция;

б) $f(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}$ — нечетная функция.

**48.** Докажите, что:

а) если четная функция монотонна на положительной части области определения, то она имеет противоположный характер монотонности на отрицательной части области определения;

б) если нечетная функция монотонна на положительной части области определения, то она имеет тот же характер монотонности на отрицательной части области определения.

**49.** Докажите, что функция $g(x) = \frac{6}{|x| + 2}$ убывает на промежутке $[0; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$.

**50.** Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

## Упражнения для повторения

**51.** Используя свойства монотонных функций, решите уравнение:

а) $x^6 + 2x^4 + 3x^2 = 6$; б) $\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{2x^2 + 1} = 6$.

**52.** Выделите целую часть из дроби $\frac{2x^3 + 6x^2 - 8x + 3}{x^2 + 2x - 3}$.

**53.** Вычислите $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.

**54.** Докажите, что при $n \in N$ и $n > 3$ значение выражения $\sqrt{n^2 + n + 4 + \sqrt{n^2 + 9 - 6n}}$ является натуральным числом.

## 4. Ограниченные и неограниченные функции

На рисунке 12 построен график функции $g(x) = \sqrt{x} - 1$. Эта функция определена на множестве неотрицательных чисел, т. е.

$$D(g) = [0; +\infty).$$

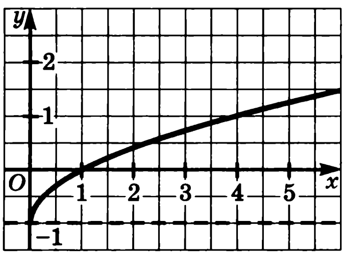


Рис. 12

Функция $g$ возрастающая. Наименьшее значение, равное $-1$, функция принимает при $x = 0$. Наибольшего значения эта функция не имеет:

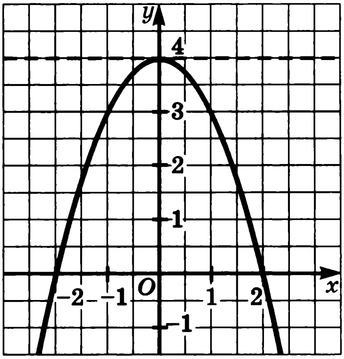



Рис. 13

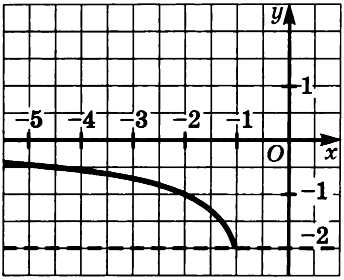



Рис. 14

если $x \to +\infty$, то $g(x) \to +\infty$. Все точки графика, кроме точки (0; −1), расположены выше прямой $y = -1$. Говорят, что функция $g$ *ограничена снизу*.

Вообще **функция $f$ ограничена снизу, если для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant a$, где $a$ — некоторое число.**

Функция $\varphi(x) = 4 - x^2$ (рис. 13) определена на множестве $R$. На промежутке $(-\infty; 0]$ она возрастает, на промежутке $[0; +\infty)$ — убывает. Наибольшее ее значение при $x = 0$ равно 4. Наименьшего значения функция не имеет: при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) $\varphi(x) \to -\infty$.

График функции $\varphi$, кроме точки (0; 4), расположен ниже прямой $y = 4$. Говорят, что функция $\varphi$ *ограничена сверху*.

Вообще **функция $f$ ограничена сверху, если для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant b$, где $b$ — некоторое число.**

На рисунке 14 изображен график функции $f(x) = \dfrac{2}{x}$, заданной на множестве $x = (-\infty; -1]$. При любом значении аргумента функция $f$ принимает отрицательные значения. Функция убывающая. Наибольшего значения функция не имеет: при $x \to -\infty$ $f(x) \to 0$ (ось $x$ — асимптота графика функции). Наименьшее значение функции при $x = -1$ равно −2. Значит, все значения функции $f$ заключены в промежутке $[-2; 0)$, т. е. $-2 \leqslant f(x) < 0$. Поэтому ее график расположен внутри полосы, ограниченной прямыми $y = -2$ и $y = 0$. В таких случаях говорят, что функция $f$ является ограниченной на множестве $X = (-\infty; -1]$.

Определение. **Функция называется ограниченной, если существуют два числа $a$ и $b$ такие, что для любого аргумента $x$ выполняется неравенство $a \leqslant f(x) \leqslant b$.**

Если условие, о котором говорится в определении ограниченной функции ($a \leqslant f(x) \leqslant b$), не выполняется, то функция не является ограниченной.

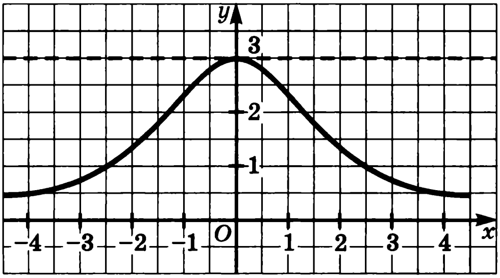



Рис. 15

Приведем примеры ограниченных функций и функций, которые не являются ограниченными.

Функция $h(x) = \dfrac{9}{x^2 + 3}$ (рис. 15) определена на множестве $\boldsymbol{R}$. При любом значении аргумента она принимает только положительные значения. Наибольшее значение функции при $x = 0$ равно 3. Наименьшего значения функция не имеет: при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) $h(x) \to 0$. Значит, для любого $x$ выполняется неравенство $0 < h(x) \leqslant 3$. Поэтому функция $h$ ограниченная.

Функция $g(x) = x^3 - 3x$ (рис. 16) определена на множестве действительных чисел. Функция может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если $x \to +\infty$, то $g(x) \to +\infty$; если $x \to -\infty$, то $g(x) \to -\infty$. Следовательно, ни наименьшего, ни наибольшего значений функция не имеет. Поэтому график функции $g$ не ограничен никакими прямыми, параллельными оси $x$. Значит, не существует никаких чисел $a$ и $b$, для которых бы выполнялось неравенство $a \leqslant g(x) \leqslant b$, т. е. функция $g$ является неограниченной.

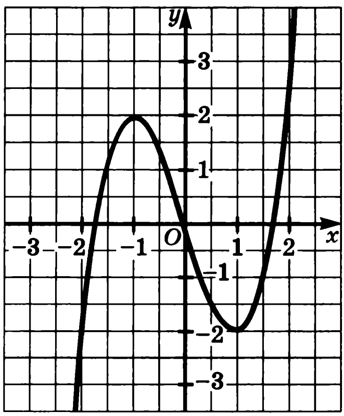



Рис. 16

Чтобы выяснить, является ли данная функция ограниченной или неограниченной, используют разные приемы.

Пример 1. Выясним, является ли функция ограниченной или неограниченной, если:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 6x + 11}$;

б) $g(x) = \dfrac{x^2 + 15}{3x^2}$;

в) $\varphi(x) = 3 - \sqrt{x^2 + 1}$.

а) Представим дробь $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 6x + 11}$ в виде $\frac{(x + 3)^2}{(x + 3)^2 + 2}$.

При $x = -3$ дробь равна нулю.

При любом $x \neq -3$ числитель и знаменатель дроби — положительные числа, причем знаменатель больше числителя.

Поэтому $0 \leqslant \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)^2 + 2} < 1$, т. е. $0 \leqslant f(x) < 1$. Значит, $f$ — ограниченная функция.

б) Разделим почленно числитель дроби $\frac{x^2 + 15}{3x^2}$ на знаменатель. Имеем:

$$\frac{x^2 + 15}{3x^2} = \frac{1}{3} + \frac{5}{x^2}.$$

Функция $y = \frac{5}{x^2}$ (или $y = 5x^{-2}$) степенная с четным отрицательным показателем. При $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) $y \to 0$, а при $x \to 0$ (слева или справа от нуля) $y \to +\infty$. График функции $g$ получается из графика функции $y = \frac{5}{x^2}$ сдвигом на $\frac{1}{3}$ вдоль оси $y$. Поэтому функция $g(x) = \frac{x^2 + 15}{3x^2}$ неограниченная. Она ограничена снизу: ее нижней границей является число $\frac{1}{3}$.

в) Выражение $\sqrt{x^2 + 1}$ принимает наименьшее значение, равное 1, при $x = 0$, а наибольшего значения не имеет (при $x \to +\infty$ $\sqrt{x^2 + 1} \to +\infty$). Значит, верно неравенство $\sqrt{x^2 + 1} \geqslant 1$. Отсюда, пользуясь свойствами числовых неравенств, последовательно получаем $-\sqrt{x^2 + 1} \leqslant -1$, $3 - \sqrt{x^2 + 1} \leqslant 2$. Следовательно, $\varphi(x) \leqslant 2$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$, т. е. функция $\varphi$ является неограниченной. Она ограничена сверху: ее верхней границей является число 2.

Пример 2. Покажем, что функция $f(x) = \frac{5x^2}{x^2 + 4}$ является ограниченной функцией.

Дробь $\frac{5x^2}{x^2 + 4}$ при любом $x$ принимает неотрицательное значение. Значит, функция $f$ ограничена снизу.

Выделим из дроби $\frac{5x^2}{x^2+4}$ целую часть:

$$\frac{5x^2}{x^2+4} = \frac{5x^2+20-20}{x^2+4} = \frac{5(x^2+4)}{x^2+4} - \frac{20}{x^2+4} = 5 - \frac{20}{x^2+4}.$$

Отсюда ясно, что $\frac{5x^2}{x^2+4} < 5$ при любом $x$, так как дробь $\frac{20}{x^2+4}$ является положительным числом при любом значении $x$. Она принимает наибольшее значение, равное 5, при $x = 0$. Значит, $0 < \frac{20}{x^2+4} \leqslant 5$.

Следовательно, при любом $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant f(x) < 5,$$

т. е. функция $f$ является ограниченной.

Ограниченность или неограниченность функции можно определить, если найти область ее значений. Действительно, если, например, область значений функции $f$ есть промежуток $[-8; 12]$, то это означает, что верно неравенство $-8 \leqslant f(x) \leqslant 12$, т. е. функция $f$ является ограниченной. Если же, например, $E(f) = [1; +\infty)$, то функция $f$ является неограниченной функцией (она ограничена снизу).

Пример 3. Выясним, является ли ограниченной или неограниченной функция:

а) $g(x) = \sqrt{9-|x|}$;  б) $f(x) = \frac{x^2+16}{2x}$.

а) Рассуждать будем так. Пусть $m$ — произвольное значение функции $g$. Тогда равенство $\sqrt{9-|x|} = m$ окажется верным при тех значениях $m$, при которых уравнение $\sqrt{9-|x|}$ относительно $x$ имеет корни. Найдем множество значений $m$, при которых это уравнение имеет корни. Тем самым мы найдем область значений функции $g$.

Возведем обе части уравнения $\sqrt{9-|x|} = m$ в квадрат и выразим $|x|$ через $m$:

$$9 - |x| = m^2,$$
$$|x| = 9 - m^2.$$

Так как $|x| \geqslant 0$, то $9 - m^2 \geqslant 0$. Отсюда $m^2 \leqslant 9$, $|m| \leqslant 3$. Но $m$ — это значение функции $g(x) = \sqrt{9-|x|}$, которая может принимать лишь неотрицательные значения. Поэтому $0 \leqslant m \leqslant 3$ или $0 \leqslant g(x) \leqslant 3$. Отсюда $E(g) = [0; 3]$. Следовательно, функция ограниченная.

б) Пусть $m$ — произвольное значение функции $f$. Найдем множество значений $m$, при которых уравнение $\frac{x^2+16}{2x} = m$ относительно $x$ имеет корни. Имеем:

$$x^2 + 16 = 2mx,$$
$$x^2 - 2mx + 16 = 0.$$

Найдем дискриминант полученного квадратного уравнения и потребуем, чтобы он был неотрицательным:

$$m^2 - 16 \geqslant 0,$$
$$m^2 \geqslant 16,$$
$$|m| \geqslant 4,$$
$$m \leqslant -4 \text{ или } m \geqslant 4,$$

т. е. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Значит, $E(f) = (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ и функция $f$ является неограниченной.

**55.** Докажите, что функция $f$ является ограниченной и укажите ее верхнюю и нижнюю границы, если:

а) $f(x) = 2x - 3$, где $x \in [5; 6]$;

б) $f(x) = x^3$, где $x \in (-2; 3]$;

в) $f(x) = x^4$, где $x \in [-2; 2)$;

г) $f(x) = \frac{6}{x}$, где $x \in [1; 6)$.

**56.** Используя графические представления, объясните, какая из функций является ограниченной, какая — неограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу):

а) $y = -5x + 4$;

б) $y = x^5$;

в) $y = -x^2$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$;

г) $y = \sqrt{x}$;

д) $y = \sqrt{x-2}$, где $x < 10$;

е) $y = \frac{12}{x}$, где $-6 < x < -1$;

ж) $y = x^{-2}$, где $-4 \leqslant x \leqslant 4$;

з) $y = |x + 3|$.

**57.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции. Укажите верхнюю и нижнюю границы функции:

а) $y = 0{,}1x - 5$, где $x \in [-10; 10]$;

б) $y = x^3$, где $x \in [-3; 1]$;

в) $y = \frac{4}{x}$, где $x \in [2; 8]$;

г) $y = \sqrt{x-3}$, где $x \in [4; 19]$.

**58.** Найдите область значений функции и определите, является ли функция ограниченной:

а) $y = \dfrac{16x}{x^2+1}$;

б) $y = \dfrac{x^2+1}{8x}$;

в) $y = \sqrt{16-x^2}$;

г) $y = \sqrt{x^2-16}$;

д) $y = |x-6|-1$;

е) $y = 5-|x+3|$.

**59.** Докажите, что функция $g$ ограниченная, если:

а) $g(x) = \sqrt{-x^2+4x+3}$;

б) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$.

**60.** Докажите, что функция $y = \dfrac{6}{1+\dfrac{1}{x^2}}$ ограниченная, но не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

**61.** Найдите наибольшее значение функции и значение аргумента, при котором функция это значение принимает:

а) $f(x) = 3-|x-1|$;

б) $f(x) = \dfrac{10-x}{3+\sqrt{x-1}}$;

в) $f(x) = \dfrac{8}{x^2-2x+3}$;

г) $f(x) = \dfrac{5}{|x-7|+1}$.

**62.** Найдите наименьшее значение функции и значение аргумента, при котором функция это значение принимает:

а) $g(x) = |x-3|-2$;

б) $g(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}$;

в) $g(x) = \dfrac{4}{x^2-2x+2}$;

г) $g(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$.

**63.** Докажите, что область значений функции

$$\varphi(x) = |x-3|+|x-1|,$$

где $1 \leqslant x \leqslant 3$, состоит из одного числа.

**64.** Существует ли такая линейная функция, которая является ограниченной?

## Упражнения для повторения

**65.** Докажите, что:

а) функция $f(x) = x^2+2x$ на промежутке $(-\infty; -2]$ убывает, а на промежутке $[0; +\infty)$ — возрастает;

б) функция $g(x) = x^3+x-7$ возрастает на множестве $\boldsymbol{R}$.

**66.** Докажите, что функция

а) $f(x) = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 4}$ является четной;

б) $g(x) = x^3 + \dfrac{6}{x^5 - x}$ является нечетной.

**67.** Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $7a^2 + 44a - 35$; б) $4b^2 + 2b - 12$.

**68.** Используя свойства монотонности функций, решите уравнение:

а) $\dfrac{x^4 + 5x - 12}{x} = 7$; б) $\dfrac{24}{x + 5} + \dfrac{4}{x - 5} = 3$.

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Сформулируйте определение возрастающей и убывающей функций на множестве $X$. Какая функция называется монотонной на множестве $X$? Приведите примеры возрастающей и убывающей функций.

**2.** Какая функция называется четной, нечетной? В чем состоит особенность графика четной функции, нечетной функции? Приведите примеры четной и нечетной функций.

**3.** Какая функция называется ограниченной, неограниченной? Приведите примеры ограниченной функции, функции, ограниченной сверху, ограниченной снизу.

**4.** Найдите область значений функции $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

# § 2. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

## 5. Функции $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$

Одним из важных классов функций, рассматриваемых в математике, является класс функций, которые можно задать формулой

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l, \qquad (1)$$

где $a \neq 0$, $n$ — натуральное число.

Такие функции называют *целыми рациональными функциями*.

Частным случаем целой рациональной функции является известная вам линейная функция с добавлением, что $a$ может быть и равно нулю. В этом случае правая часть формулы (1), задающей линейную функцию, является многочленом первой или нулевой степени.

Сейчас мы познакомимся с другим видом целой рациональной функции, у которой правая часть формулы (1) есть многочлен второй степени, или, говоря иначе, квадратный трехчлен.

Определение. **Функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называют квадратичной функцией.**

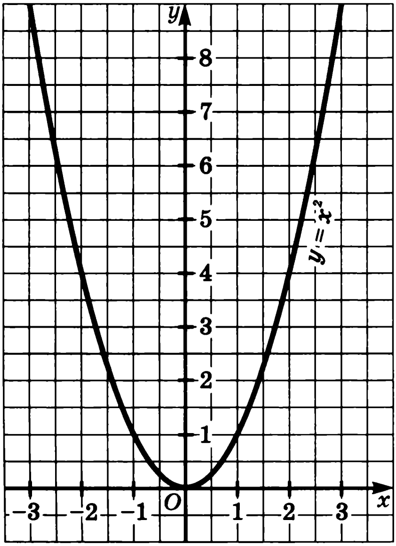



Рис. 17

При $b = c = 0$ формула, задающая квадратичную функцию, принимает вид $y = ax^2$.

Некоторые свойства функции $y = ax^2$ при $a = 1$ вы изучили в 7-м классе. Другие свойства функции $y = x^2$ (возрастание и убывание; область значений функции) как частный случай степенной функции $y = x^n$ при $n = 2$ были рассмотрены в § 1.

Областью определения функции является множество действительных чисел, т. е.

$$D(y) = \boldsymbol{R}.$$

Перечислим свойства функции $y = x^2$. Ее график изображен на рисунке 17.

**1.** Функция четная.

**2.** $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x > 0$ и при $x < 0$.

**3.** Область значений функции $E(y) = [0; +\infty)$.

**4.** Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Функция имеет наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

График функции $y = x^2$ называют *параболой*. Вершина параболы $y = x^2$ — точка (0; 0) а ось симметрии параболы — ось $y$. Ветви параболы направлены вверх.

Вы знаете, что график функции $y = kf(x)$ при $k > 1$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением от оси $x$ в $k$ раз, а при $0 < k < 1$ — сжатием к оси $x$ в $\frac{1}{k}$ раз. Следовательно, график функции $y = 2x^2$ есть парабола, полученная из графика функции $y = x^2$

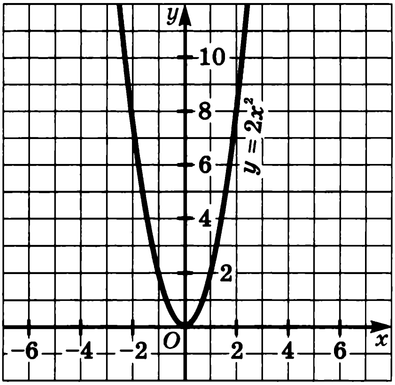



Рис. 18

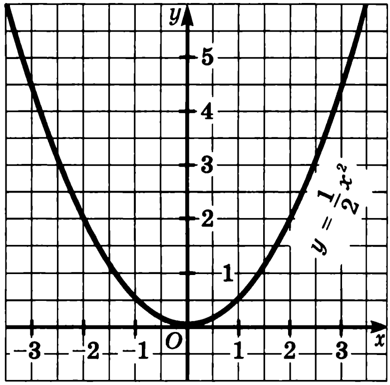



Рис. 19

растяжением от оси $x$ в 2 раза, а график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ — парабола, полученная из графика функции $y = x^2$ сжатием к оси $x$ в 2 раза (рис. 18 и 19).

Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$ такие же, как и свойства функции $y = x^2$.

График функции $y = ax^2$, где $a < 0$, получается из графика функции с противоположным (положительным) значением $a$ в результате симметрии относительно оси $x$.

На рисунках 20 и 21 изображены графики функций $y = -x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$.

Зная, какой вид имеет график функции $y = ax^2$, при $a < 0$, легко установить свойства этой функции.

Известно, что график функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси $y$ на $n$ еди-

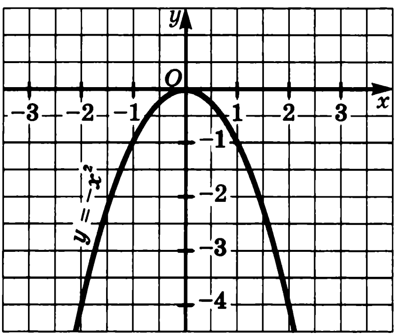



Рис. 20

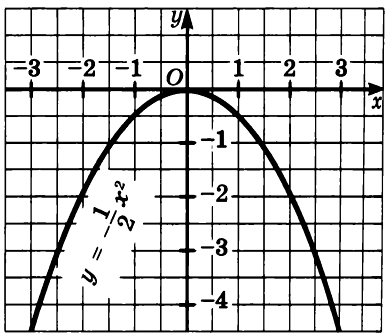



Рис. 21

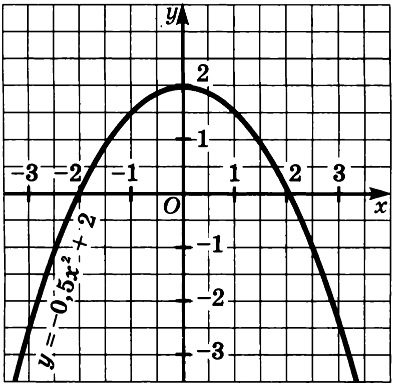



Рис. 22

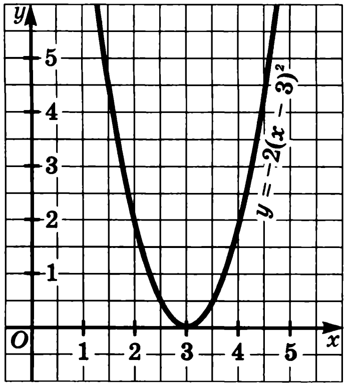



Рис. 23

ниц вверх, если $n > 0$, или на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$, а график функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига графика функции $y = f(x)$ на $m$ единиц вправо, если $m > 0$, или на $|m|$ единиц влево, если $m < 0$.

Поэтому графиком функции вида $y = ax^2 + n$ является парабола с вершиной в точке $(0; n)$, а графиком функции $y = a(x - m)^2$ — парабола с вершиной в точке $(m; 0)$.

На рисунках 22 и 23 изображены графики функций $y = -0{,}5x^2 + 2$ и $y = 2(x - 3)^2$.

**69.** Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = -\frac{1}{4}x^2$. Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания для каждой функции.

**70.** Изобразите схематически график функции $y = ax^2$, где $a < 0$, и перечислите свойства этой функции.

**71.** Найдите координаты точек пересечения прямой $y = 1$ и графика функции:

а) $y = 16x^2$; б) $y = \frac{1}{16}x^2$.

**72.** Задайте формулой зависимость площади $S$ круга от его радиуса $R$. Изобразите схематически график этой зависимости.

**73.** Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = ax^2$ и $y = ax$, где $a \neq 0$.

**74.** Постройте в одной системе координат графики функций:
а) $y = 0{,}5x^2$, $y = 0{,}5x^2 + 2$, $y = 0{,}5x^2 - 4$;
б) $y = 0{,}5x^2$, $y = 0{,}5(x - 3)^2$, $y = 0{,}5(x + 2)^2$.

**75.** Опишите свойства функции:
а) $y = 3x^2 - 12$;
б) $y = -3x^2 + 12$;
в) $y = 2(x - 5)^2$;
г) $y = -2(x + 5)^2$.

**76.** При каком значении $n$ областью значений функции $y = 7x^2 + n$ является промежуток:
а) $[-8; +\infty)$;
б) $[10; +\infty)$?

**77.** Найдите значение $m$, зная, что функция $y = 0{,}5(x - m)^2$
а) убывает на промежутке $(-\infty; 6]$ и возрастает на промежутке $[6; +\infty)$;
б) убывает на промежутке $(-\infty; -4]$ и возрастает на промежутке $[-4; +\infty)$.

**78.** Постройте график функции $y = (x - 3)^2 + 2$. Укажите координаты вершины параболы и напишите уравнение ее оси симметрии.

**79.** График функции $y = 0{,}5x^2$ сдвинули на 4 единицы вправо (вдоль оси $x$) и на 2 единицы вверх (вдоль оси $y$). Напишите формулу, которой задается эта функция.

**80.** При каком значении $a$ график функции $y = ax^2 - 5$ проходит через точку:
а) $A(3; 11)$; б) $B(-4; -13)$; в) $C(6; 2{,}2)$?

**81.** Найдите точки пересечения графиков функций:
а) $y = 2x^2 + 1$ и $y = 3(x - 2)^2$;
б) $y = -x^2 + 4$ и $y = 7(x - 1)^2$.

**82.** Постройте график функции:
а) $f(x) = x|x|$;
б) $f(x) = x^2 - \dfrac{|x|}{x}$;
в) $f(x) = \dfrac{x^3 - |x|}{x}$;
г) $f(x) = \dfrac{x^4 - x|x|}{x^2}$.

**83.** Постройте график функции:
а) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x < -2, \\ x^2 - 4, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -x + 2, \text{ если } x > 2; \end{cases}$
б) $y = \begin{cases} \dfrac{4}{x - 1}, \text{ если } x < 0, \\ x^2 - 4, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

**84.** Найдите область определения функции $g(x) = \dfrac{\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{4}{x^2-1}}$

и постройте ее график.

## Упражнения для повторения

**85.** Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

а) $x^2 - 6x + 14$;
б) $x^2 + 8x - 2$;
в) $3x^2 - 12x - 5$;
г) $0{,}5x^2 + 3x + 7$.

**86.** Решите уравнение:

а) $x - \sqrt{x} = 6$;
б) $3x - 4\sqrt{x} = 4$.

**87.** Представьте в виде рациональной дроби

$$\frac{a-1}{a+2} - \frac{1-a}{a^2+3a+2}.$$

## 6. График и свойства квадратичной функции

Любую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ можно задать формулой вида $y = a(x - m)^2 + n$.

Докажем это.

Выделив из квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена, получим

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Обозначив $-\dfrac{b}{2a}$ буквой $m$, а $-\dfrac{D}{4a}$ — буквой $n$, получим

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n.$$

Следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из графика функции с помощью двух параллельных переносов — сдвига вдоль оси $x$ и сдвига вдоль оси $y$.

График функции $y = ax^2$ — парабола. Значит, и графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $(m; n)$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{D}{4a}$. Осью симметрии параболы является прямая $x = m$.

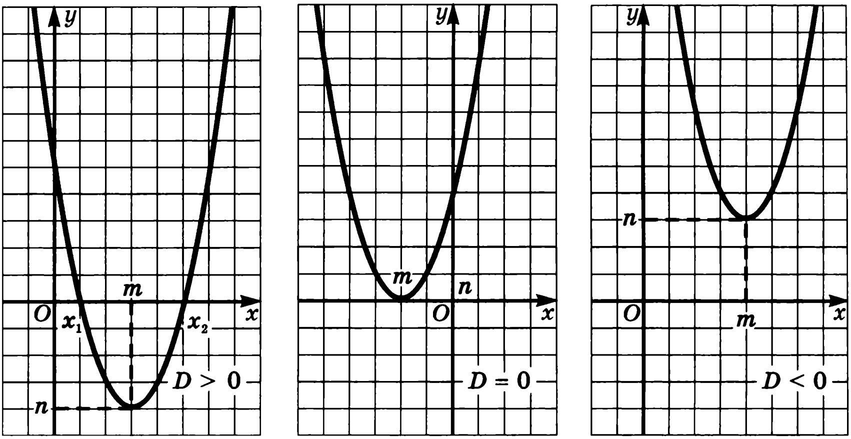



**Рис. 24**

Учитывая этот вывод, можно схематически изобразить график квадратичной функции.

На рисунке 24 показано, какой вид имеют эти графики в зависимости от знака дискриминанта $D$ при $a > 0$.

Перечислим свойства функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$.

1. Область определения функции — множество действительных чисел.

2. Если $D > 0$, то функция обращается в нуль при $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Если $D = 0$, то она обращается в нуль при $x = -\frac{b}{2a}$. Если $D < 0$, то функция нулей не имеет.

3. Если $D > 0$, то функция принимает положительные значения в каждом из промежутков $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$ и отрицательные значения в промежутке $(x_1;\ x_2)$. Если $D = 0$, то функция принимает положительные значения при любых $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x = -\frac{b}{2a}$. Если $D < 0$, то функция положительна на всей области определения.

4. Функция убывает на промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$. При $x = -\frac{b}{2a}$ функция принимает наименьшее значение, равное $-\frac{D}{4a}$.

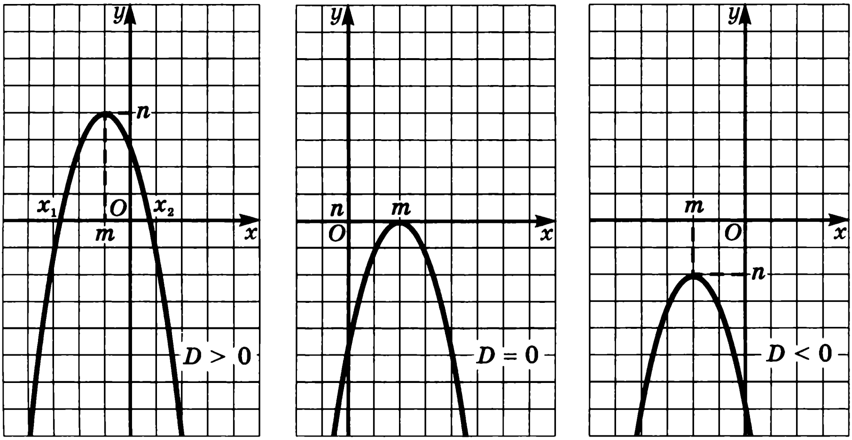



Рис. 25

5. Область значений функции — множество $\left[-\frac{D}{4a}; +\infty\right)$.

На рисунке 25 показано, какой вид имеют графики квадратичной функции при $a < 0$ и в зависимости от знака $D$.

Перечислите свойства функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a < 0$.

При построении графика квадратичной функции, заданной формулой $f(x) = ax^2 + bx + c$, целесообразно найти нули функции, координаты вершины параболы, координаты точки пересечения параболы с осью $y$ и точки, симметричной ей относительно оси симметрии параболы. Затем следует отметить эти точки в координатной плоскости и провести через них плавную непрерывную линию.

Заметим, что в тех случаях, когда парабола не имеет общих точек с осью $x$ или пересекает ось $y$ в точке, достаточно удаленной от начала координат, для построения параболы используют другие точки, симметричные относительно ее оси.

Пример 1. Построим график функции

$$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1.$$

Найдем нули функции. Решив уравнение $0{,}5x^2 - 2x - 1 = 0$, получим, что $x_1 \approx -0{,}5$, $x_2 \approx 4{,}5$. Значит, парабола пересекает ось $x$ в точках, абсциссы которых приближенно равны $-0{,}5$ и $4{,}5$.

Вычислим координаты $m$ и $n$ вершины параболы. Абсциссу $m$ найдем по формуле $m = -\frac{b}{2a}$, а ординату $n$ найдем, подставив в формулу $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1$ вместо $x$ значение $m$. Имеем:

$$m = -\frac{-2}{2 \cdot 0{,}5} = 2; \; n = f(2) = 0{,}5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = -3.$$

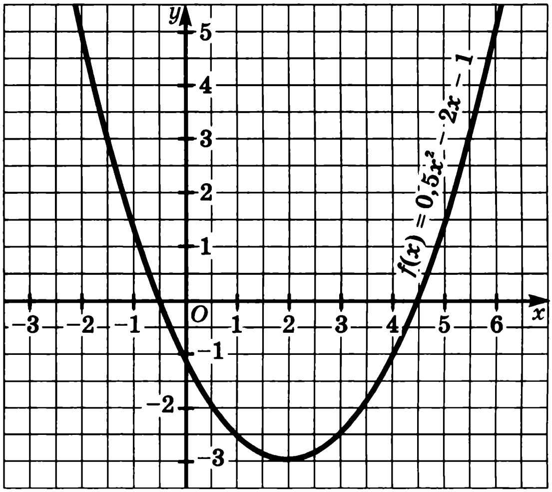



Рис. 26

Положив $x = 0$, найдем координаты точки пересечения параболы с осью $y$. Получим точку $(0; -1)$. Симметричная ей точка относительно оси симметрии параболы имеет координаты $(4; -1)$.

Построим эти точки и, учитывая направление ветвей параболы, проведем через них непрерывную линию. Получим график функции $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1$ (рис. 26).

Пример 2. Построим график функции

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2.$$

Решив уравнение $-\frac{1}{4}x^2 - x + 2 = 0$, найдем нули функции: $x_1 \approx -5{,}5$, $x_2 \approx 1{,}5$. Значит, график пересекает ось $x$ в точках, абсциссы которых приближенно равны $-5{,}5$ и $1{,}5$.

Вычислим координаты $m$ и $n$ вершины параболы:

$$m = -\frac{-1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = -2;$$

$$n = g(-2) = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - (-2) + 2 = 3.$$

Найдем координаты точки пересечения параболы с осью $y$ и точки, симметричной ей относительно оси симметрии параболы: $(0; 2)$ и $(-4; 2)$.

Построим эти точки и проведем через них непрерывную линию. Получим график функции $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$ (рис. 27).

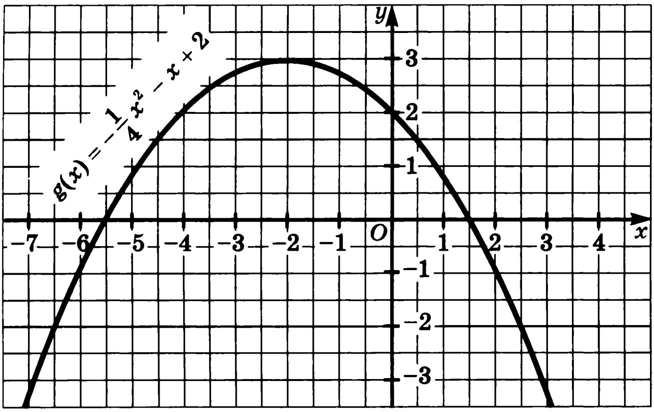



**Рис. 27**

Остановимся теперь на одном важном свойстве параболы. При вращении вокруг оси симметрии парабола описывает фигуру, называемую параболоидом. Если внутреннюю поверхность параболоида сделать зеркальной и направить на нее пучок лучей, параллельных оси, то отраженные лучи соберутся в одной точке — фокусе. Если параболическое зеркало направить на Солнце, то температура в фокусе окажется такой высокой, что можно будет расплавить металл. Это свойство, согласно легенде, использовал Архимед (287—212 гг. до н. э.), чтобы помочь защитникам Сиракуз в войне против римлян. Он построил систему параболических зеркал, позволившую сфокусировать отраженные солнечные лучи на кораблях римлян. В результате на кораблях вспыхнул пожар, и они превратились в пепел.

Если источник света поместить в фокусе, то отраженные от зеркальной поверхности параболоида лучи оказываются направленными параллельно его оси и не рассеиваются. Это свойство используется при изготовлении прожекторов и автомобильных фар.

**88.** Найдите координаты вершины параболы и уравнение ее оси симметрии, если функция задана формулой:

а) $y = x^2 - 6x + 8$; в) $y = 2x^2 - 5x + 6$;
б) $y = -x^2 + 8x - 10$; г) $y = -4x^2 + 2x - 5$.

**89.** Постройте график функции и перечислите свойства этой функции, если

а) $y = 0{,}25x^2 - 1{,}5x - 1{,}75$; б) $y = -0{,}5x^2 - 2x + 2$.

**90.** Изобразите схематически график функции:

а) $y = 3x^2 - 2x + 1$; в) $y = 0{,}1x^2 - 5x - 8$;
б) $y = -5x^2 + 6x + 7$; г) $y = -0{,}2x^2 + 6x + 1$.

**91.** Найдите координаты вершины параболы

$$y = (x - 3)(x + 5).$$

**92.** Докажите, что нули $x_1$ и $x_2$ функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$ и $D > 0$, расположены:

а) вне полосы, ограниченной прямыми $x = 0$ и $x = -\frac{b}{2a}$, если $c < 0$;

б) внутри полосы, ограниченной прямыми $x = 0$ и $x = -\frac{b}{2a}$, если $c > 0$.

Проиллюстрируйте это на графиках.

**93.** Зная, что $(m; n)$ — координаты вершины параболы$a\,x^2 + bx + c$, а $x_1$ и $x_2$ — нули функции $f$, докажите, что верны формулы:

а) $x_1 = m - \sqrt{-\frac{n}{a}}$, $x_2 = m + \sqrt{-\frac{n}{a}}$;

б) $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $n = -a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$.

**94.** Используя формулы (упражнение № 93, б), найдите координаты вершины параболы:

а) $y = (x - 2)(x + 4)$; б) $y = (x + 6)(x - 10)$.

**95.** Постройте график функции:

а) $y = (x - 1)(x - 5)$; б) $y = (x + 2)(x - 4)$.

Найдите промежутки, в которых функция принимает положительные значения, отрицательные значения.

**96.** При каких значениях $c$ парабола $y = x^2 - 8x + c$ расположена выше прямой:

а) $y = 8$; б) $y = -26$?

**97.** При каком значении $c$ парабола $y = x^2 - 6x + c$ касается прямой:

*а) $y = 0$; б) $y = 3$; в) $y = -3$?*

**98.** Парабола проходит через точки $A$ и $B$. Найдите $p$ и $q$, если

а) $A(-3; 7)$ и $B(1; 5)$; б) $A(5; 2)$ и $B(-2; 3)$.

**99.** Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной $F(-2; -25)$, проходящая через точку $M(4; 11)$. Задайте эту функцию формулой.

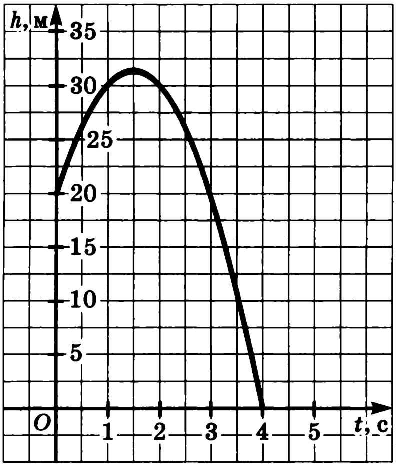


Рис. 28

**100.** Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0$ (в м/с) с высоты $h_0$ (в метрах). Высота $h$ (в метрах) в зависимости от времени $t$ (в секундах) выражается формулой

$$h = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0.$$

На рисунке 28 показан график зависимости $h$ от $t$ для случая, когда $h_0 = 20$, $v_0 = 15$, $g = 10$.

Найдите по графику:

1) Сколько времени тело поднималось вверх?

2) Сколько времени оно опускалось?

3) Какой наибольшей высоты достигло тело?

4) Через сколько секунд оно упало на землю?

**101.** Периметр прямоугольника равен 40 см. Какими должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

**102.** Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 12 см. Найдите длины катетов треугольника, при которых треугольник имеет наибольшую площадь.

## Упражнения для повторения

**103.** Упростите выражение

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)}.$$

**104.** Докажите, что значение выражения

$$\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$$

является натуральным числом.

**105.** Решите уравнение $\frac{y + \sqrt{y} + 6}{3} = 2\sqrt{y}$.

**106.** Выясните характер монотонности функции:

а) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$; б) $g(x) = \frac{x^4 - 5x - 8}{x}$, где $x < 0$.

### Контрольные вопросы и задания

**1.** Какую функцию называют квадратичной функцией?

**2.** Сформулируйте свойства функции $y = ax^2$ для случая $a > 0$ и случая $a < 0$.

**3.** Изобразите схематически график функции $y = ax^2 + bx + c$ для случая, когда $a > 0$ и $D > 0$, и перечислите свойства этой функции.

**4.** В чем различие и сходство в свойствах функций

$$y = x^2 - 4x + 1 \text{ и } y = -x^2 + 4x - 1?$$

# § 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

## 7. Растяжение и сжатие графиков функций к оси ординат

В курсе алгебры 8-го класса были рассмотрены преобразования графиков функций, выполняемые с помощью растяжения от оси абсцисс и сжатия к оси абсцисс и параллельных переносов вдоль осей координат. Здесь мы рассмотрим другие виды преобразований графиков.

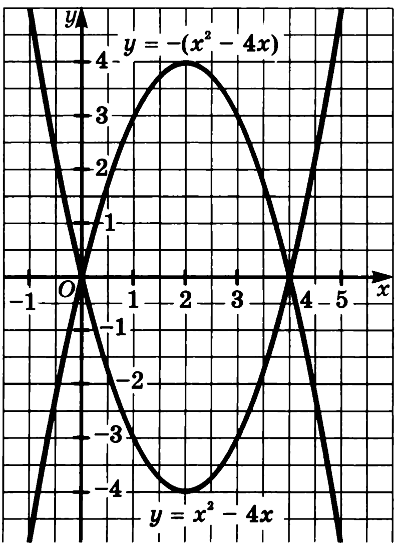



Рис. 29

Вы знаете, что графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси $x$, т. е. график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси $x$.

На рисунке 29 приведен пример такого преобразования. График функции $y = -(x^2 - 4x)$ получен из графика функции $y = x^2 - 4x$ с помощью симметрии относительно оси $x$.

Выясним теперь, как построить график функции $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$.

Пусть $(x_1; y_1)$ — произвольная точка координатной плоскости. Тогда симметричная ей точка относительно оси $y$ имеет координаты $(-x_1;\ y_1)$. Если точка $(x_1;\ y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то верно равенство $y_1 = f(x_1)$. Очевидно, что, подставив координаты точки $(-x_1;\ y_1)$ в формулу $y = f(-x)$, также получим верное равенство

$$y_1 = f(-(-x_1)).$$

Значит, каждой точке $(x_1;\ y_1)$ графика функции $y = f(x)$ соответствует единственная точка $(-x_1;\ y_1)$ графика функции $y = f(x)$. Верно и обратное. Если точка $(x_2;\ y_2)$ принадлежит графику функции $y = f(-x)$, т. е. если верно равенство $y_2 = f(-x_2)$, то точка $(-x_2;\ y_2)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Действительно, подставив ее координаты в формулу $y = f(x)$, получим то же самое равенство $y_2 = f(-x_2)$. Следовательно, графики функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ симметричны относительно оси $y$.

Значит, *график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси ординат.*

На рисунке 30 изображен график функции $y = \sqrt{x-1}$. Выполнив симметрию относительно оси $y$, получим график функции $y = \sqrt{-x-1}$.

Зная график функции $y = f(x)$, можно построить график функции $y = -f(-x)$. Для этого надо выполнить последовательно два преобразования: сначала симметрию относительно оси $y$, затем симметрию относительно оси $x$. Полученный график окажется симметричным данному графику функции $y = f(x)$ относительно начала координат.

Действительно, если $A(x_1;\ y_1)$ — произвольная точка координатной плоскости (рис. 31), то, отобразив ее сначала симметрично

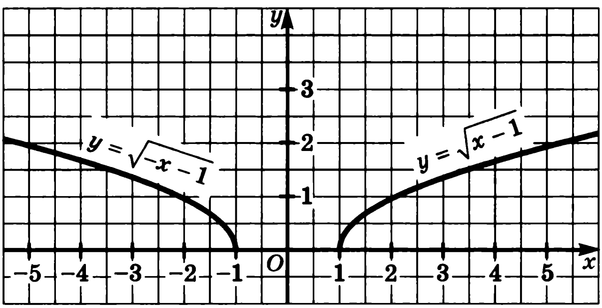



**Рис. 30**

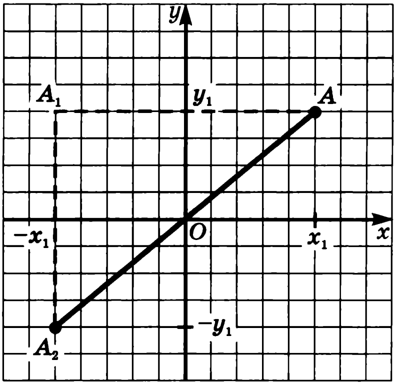



Рис. 31

относительно оси $y$, а затем полученную точку $A_1(-x_1;\ y_1)$ — симметрично относительно оси $x$, получим точку $A_2(-x_1;\ -y_1)$, которая симметрична точке относительно начала координат.

Если точка $(x_1;\ y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$ (значит, верно равенство $y_1 = f(x_1)$), то симметричная ей относительно начала координат точка $(-x_1;\ -y_1)$ принадлежит графику функции $y = -f(-x)$ (равенство $-y_1 = -f(-(-x_1))$ также верное).

Таким образом, *график функции $y = -f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно начала координат.*

На рисунке 32 построены график функции $y = \sqrt{x - 2} + 1$ и график функции $y = -\sqrt{-x - 2} - 1$. Эти графики симметричны относительно начала координат.

В 8-м классе мы выяснили, какая существует связь между графиками функций $y = f(x)$ и $y = k \cdot f(x)$, где $k$ — число, не равное

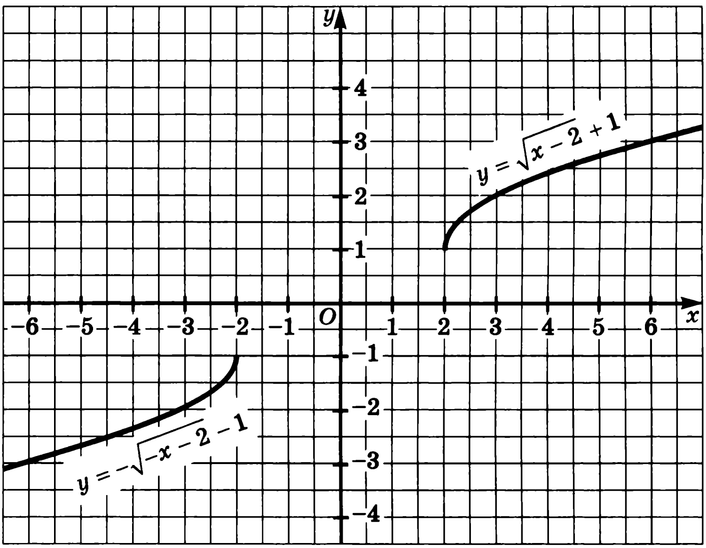



Рис. 32

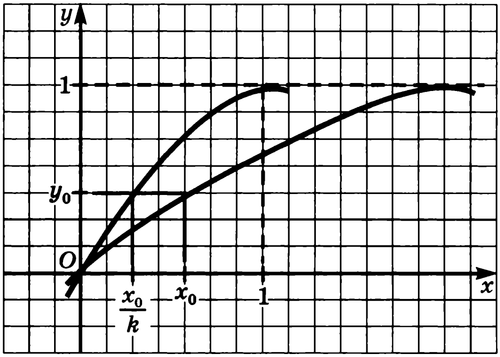



**Рис. 33**

нулю. Выясним теперь, какая связь существует между графиками функций $y = f(x)$ и $y = f(kx)$, где $k \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда $k > 1$. Пусть точка $(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. верно равенство $y_0 = f(x_0)$ (рис. 33). Тогда точка $\left(\frac{x_0}{k};\ y_0\right)$ принадлежит графику функции $y = f(kx)$, т. к. $f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(kx_0) = y_0$. Значит, каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y = f(x)$ соответствует точка $\left(\frac{x_0}{k};\ y_0\right)$ графика функции $y = f(kx)$.

Верно и обратное. Если точка $\left(\frac{x_1}{k};\ y_1\right)$ принадлежит графику функции $y = f(kx)$, то точка $(x_1;\ y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Это следует из того, что $f\left(k \cdot \frac{x_1}{k}\right) = f(x_1) = y_1$. Значит, каждой точке $\left(\frac{x_1}{k};\ y_1\right)$ графика функции $y = f(kx)$ соответствует точка $(x_1;\ y_1)$ графика функции $y = f(x)$.

Заметим, что точки $\left(\frac{x_1}{k};\ y_1\right)$ и $(x_1;\ y_1)$ лежат на прямой, параллельной оси абсцисс, причем точка $\left(\frac{x_1}{k};\ y_1\right)$ лежит в $k$ раз ближе к оси ординат, чем точка $(x_1;\ y_1)$. Из этого следует, что *график функции $y = f(kx)$ при $k > 1$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $k$ раз к оси ординат.*

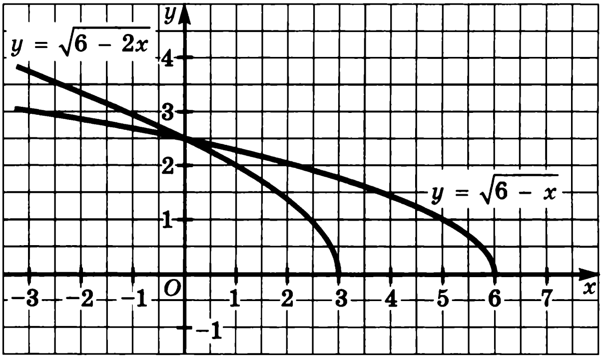



**Рис. 34**

На рисунке 34 изображен график функции $y = \sqrt{6 - x}$. Выполнив сжатие к оси ординат в 2 раза, получим график функции $y = \sqrt{6 - 2x}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < k < 1$. Заметим, что точка $\left(\frac{x_1}{k};\ y_1\right)$ лежит в $\frac{1}{k}$ раз дальше от оси ординат, чем точка $(x_1;\ y_1)$, так как $0 < k < 1$ и $\frac{1}{k} > 1$, т. е. $\frac{1}{k} \cdot x_1 > x_1$. Таким образом, приходим к выводу: *график функции $y = f(kx)$ при $0 < k < 1$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат.*

На рисунке 35 изображен график функции $y = 4 - x^2$. Выполнив растяжение от оси ординат в 2 раза, получим график функции $y = 4 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $k < 0$. Поскольку мы уже выяснили, как можно построить график функции $y = f(-x)$, зная график функции $y = f(x)$, то для построения графика функции $y = f(kx)$ при $k < 0$ сначала нужно построить график функции $y = f(|k| \cdot x)$ (с помощью растяжения или сжатия к оси ординат), а потом его отобразить симметрично относительно оси ординат.

Для построения графика функции $y = f(kx + b)$ из графика функции $y = f(x)$, поступают следующим образом:

1) записывают функцию $y = f(kx + b)$ в виде $y = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$;

2) строят график функции $y = f(kx)$;

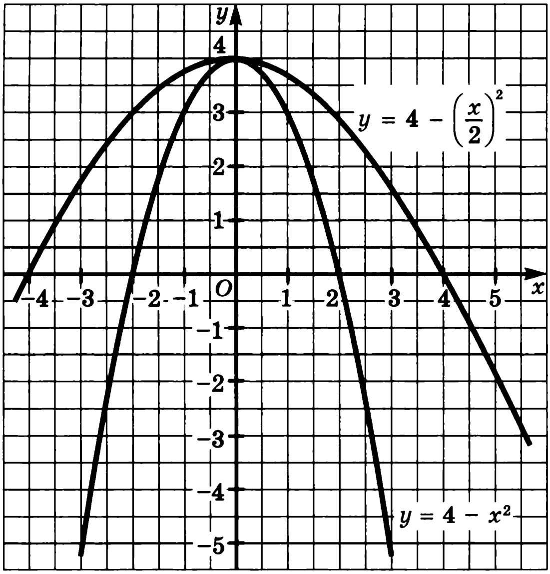



**Рис. 35**

3) из полученного графика строят график функции $y = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$.

Например, чтобы построить график функции $y = \sqrt{2x + 4}$, зная график функции $y = \sqrt{x}$, надо сначала записать данную функцию в виде $y = \sqrt{2(x + 2)}$. На рисунке 36 изображены графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x}$ и $y = \sqrt{2(x + 2)}$.

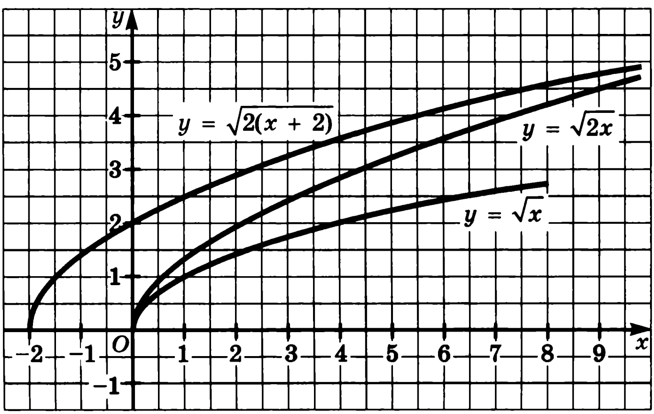



**Рис. 36**

**107.** Графиком функции $y = f(x)$ служит отрезок $AB$, где $A(-4;\ 2)$, $B(4;\ -6)$. Постройте в одной системе координат график данной функции и функции:

а) $y = f(2x)$; б) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$; в) $y = f\left(-\frac{x}{2}\right)$; г) $y = f(-3x)$.

**108.** Ломаная $ABC$, где $A(-4;\ 2)$, $B(-2;\ -4)$, $C(4;\ 6)$, является графиком функции $y = g(x)$. Постройте график функции:

а) $y = f(2x)$; б) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$; в) $y = f(-0{,}5x)$; г) $y = f(-3x)$.

**109.** Точка $M(6;\ 11)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Найдите соответствующую точку, принадлежащую графику:

а) $y = f(2x)$; б) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$; в) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$; г) $y = f(-3x)$.

**110.** Функция $y = f(x)$ имеет область определения $D(f) = [-3;\ 4]$ и область значений $E(f) = [-1;\ 5]$. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = f(2x)$; б) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$; в) $y = f(-0{,}5x)$; г) $y = f(-3x)$.

**111.** Графиком функции $y = f(x)$ служит отрезок $AB$, где $A(-3;\ 5)$ и $B(7;\ -1)$. Постройте этот график и в той же системе координат график функции:

а) $y = f(-x)$; б) $y = -f(-x)$.

**112.** Графиком функции является ломаная $KLM$, где $K(-2;\ 1)$, $L(1;\ 4)$, $M(6;\ -1)$. Постройте график функции $y = g(x)$ и график функции:

а) $y = g(-x)$; б) $y = -g(-x)$.

**113.** Укажите, какие преобразования графика функции $y = |x|$ нужно провести, чтобы получить график функции:

а) $y = 3 - |2x - 4|$; б) $y = |2 - 2x| - 3$.

**114.** Укажите, какие преобразования графика функции $y = \frac{1}{x}$ нужно провести, чтобы получить график функции:

а) $y = 3 + \frac{2}{2x - 1}$; б) $y = \frac{3 - x}{2x - 4}$.

**115.** В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-2x}$; в) $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$;

б) $y = \frac{3}{x}$ и $y = -\frac{3}{2x}$; г) $y = \frac{3}{x}$ и $y = \frac{3}{0{,}5x}$.

**116.** Постройте график функции:
а) $y = 4x^2 + 4x + 3$; б) $y = -4x^2 - 4x - 2$.

**117.** Дана функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 4, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Постройте график функции:
а) $y = \varphi(-x)$; б) $y = -\varphi(-x)$.

**118.** Постройте график функции $g(x) = \frac{4}{x}$, где $x > 0$, и график функции:
а) $y = g(-x)$; б) $y = -g(-x)$.

**119.** Известно, что область определения функции $y = f(x)$ есть промежуток $[-5; 7]$, а область значений — промежуток $[-10; 18]$. Каковы область определения и область значений функции:
а) $y = -f(x)$; б) $y = f(-x)$; в) $y = -f(-x)$?

**120.** Известно, что область определения функции $y = g(x)$ — множество $\boldsymbol{R}$; $g(x) < 0$ тогда и только тогда, когда $x \in (-\infty; -3) \cup \cup (4; 6)$; $g(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $x \in (-3; 4) \cup (6; +\infty)$. Найдите нули и промежутки знакопостоянства функции:
а) $y = -g(x)$; б) $y = g(-x)$; в) $y = -g(-x)$.

**121.** Если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[a; b]$, то функция $y = f(-x)$ убывает на промежутке $[-b; -a]$. Докажите это.

**122.** Известно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет корни 2 и 3. Найдите корни уравнения $f(-x) = 0$.

**123.** Докажите, что графики функций
а) $y = \frac{3x - 7}{3x + 7}$ и $y = \frac{3x + 7}{3x - 7}$ симметричны относительно оси $y$;

б) $y = \frac{10 - 2x}{10 + 2x}$ и $y = \frac{2x + 10}{2x - 10}$ симметричны относительно начала координат.

в) $y = \frac{x^2 - 3x + 8}{x^2 + 3x + 8}$ и $y = \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 - 3x + 8}$ симметричны относительно оси $y$;

г) $y = \frac{x^3 - 8x + 1}{x^3 + 8x + 1}$ и $y = \frac{1 + 8x - x^3}{x^3 + 8x - 1}$ симметричны относительно начала координат.

**124.** Известно, что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ обращается в нуль при $x = -5$ и $x = 7$. Найдите корни многочлена:
а) $-x^3 + ax^2 - bx + c$; б) $x^3 - ax^2 + bx - c$.

**125.** Точка $A(8; 72)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$. Найдите соответствующую точку, принадлежащую графику функции:
а) $y = -g(x)$; б) $y = g(-x)$; в) $y = -g(-x)$.

**126.** Известно, что $E(f) = (-2; 3)$. Найдите границы для функции:
а) $y = -f(x)$; б) $y = f(-x)$; в) $y = -f(-x)$.

**127.** Дан график функции $y = |x|$. Запишите формулу, которой задается функция, график которой получен из данного графика с помощью: а) сдвига на три единичных отрезка влево и растяжения от оси ординат в 2 раза; б) растяжения от оси ординат в 2 раза и сдвига на три единичных отрезка влево.

**128.** Запишите формулу, задающую функцию, если ее график получен из графика функции $y = \sqrt{x}$ последовательным выполнением следующих преобразований: а) растяжение от оси ординат в 2 раза, сдвиг на три единичных отрезка влево, симметрия относительно оси ординат, сдвиг на два единичных отрезка вниз, сжатие к оси абсцисс в 2 раза; б) сжатие к оси ординат в 2 раза, сдвиг на один единичный отрезок вправо, сдвиг на два единичных отрезка вверх, растяжение от оси абсцисс в 3 раза, симметрия относительно оси абсцисс.

## Упражнения для повторения

**129.** Решите уравнение:
а) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$; в) $(x + 2)^2 + 9(x + 2) + 20 = 0$;
б) $x^2 - 2|x| - 35 = 0$; г) $(x - 5)^2 + 2(x - 5) - 63 = 0$.

**130.** Найдите сумму корней уравнения:
а) $x^2 - 4|x| - 3 = 0$; б) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$.

**131.** Докажите тождество
$2(a^2 + ab + b^2)^2 = a^4 + b^4 + (a + b)^4$.

**132.** Зная, что $3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$ и $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$, оцените выражение:
а) $2\sqrt{5} + \sqrt{10}$; б) $2\sqrt{5} - \sqrt{10}$.

**133.** Найдите целые решения системы

$$\begin{cases} x + \dfrac{x-5}{3} \geqslant 1, \\ x - \dfrac{15-x}{4} < 5. \end{cases}$$

## 8. Графики функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$

Как построить график функции $y = |f(x)|$ и график функции $y = f(|x|)$, если известен график функции $y = f(x)$?

Чтобы ответить на этот вопрос, каждую из функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ зададим иначе, воспользовавшись определением модуля:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0; \end{cases}$$

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \geqslant 0, \\ f(-x), \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Представив таким образом рассматриваемые функции, мы нашли ответ на поставленный вопрос, сведя задачу к известным нам преобразованиям графиков.

Итак, *чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, если известен график функции $y = f(x)$, нужно оставить на месте ту его часть, где $f(x) \geqslant 0$, и симметрично отобразить относительно оси $x$ другую его часть, где $f(x) < 0$.*

*Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, если известен график функции $y = f(x)$, нужно оставить на месте ту часть графика функции $y = f(x)$, которая соответствует неотрицательной части области определения функции $y = f(x)$. Отразив эту часть симметрично относительно оси $y$, получим другую часть графика, соответствующую отрицательной части области определения.*

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Функция $y = g(x)$, областью определения которой является промежуток $[-3; 4]$, задана графиком (рис. 37). Построим график функции:

а) $y = |g(x)|$; б) $y = g(|x|)$.

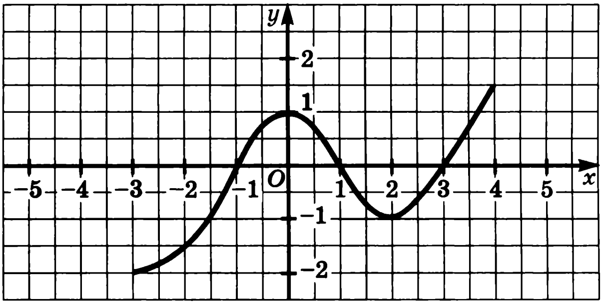



Рис. 37

а) Рассматривая график, изображенный на рисунке 37, заключаем, что

$$g(x) \geqslant 0, \text{ если } x \in [-1;\ 1] \cup [3;\ 4],$$
$$g(x) < 0, \text{ если } x \in [-3;\ -1) \cup (1;\ 3).$$

Для построения графика функции $y = |g(x)|$ ту часть графика функции $y = g(x)$, которая расположена выше оси $x$, т. е. на множестве $[-1;\ 1] \cup [3;\ 4]$, оставим на месте, а другую часть графика функции $y = g(x)$, которая расположена ниже оси $x$, т. е. на множестве $[-3;\ -1) \cup (1;\ 3)$, отобразим симметрично относительно оси $x$. Получим график функции $y = |g(x)|$ (рис. 38).

б) Для построения графика функции $y = g(|x|)$ ту часть графика, которая расположена справа от оси $y$, оставляем на месте. Затем построим кривую, симметричную относительно оси $y$ правой части графика. Получим другую часть графика, расположенную слева от оси $y$ (рис. 39).

Пример 2. Построим график функции $y = |-x^2 + 2x|$.

Строим график функции $y = -x^2 + 2x$ (ту часть графика, которая расположена ниже оси $x$, намечаем пунктиром). Затем строим недостающую часть графика путем симметрии относительно оси $x$ пунктирной части (рис. 40).

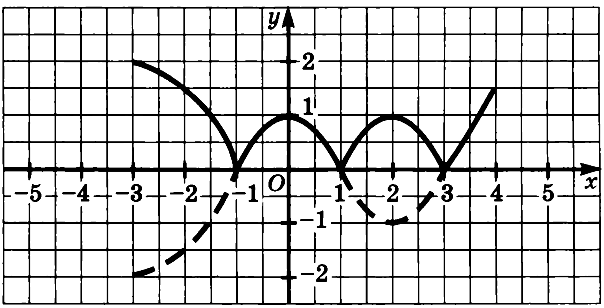



Рис. 38

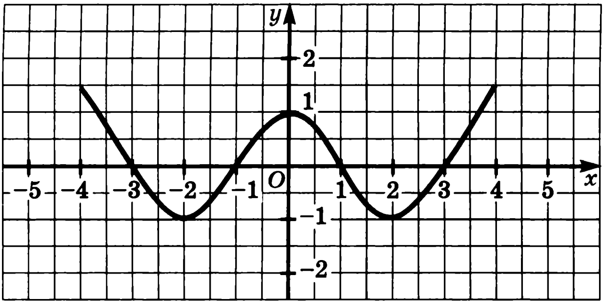



Рис. 39

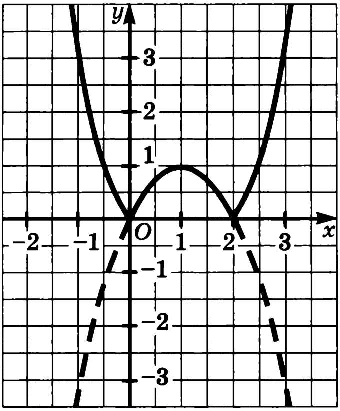



Рис. 40

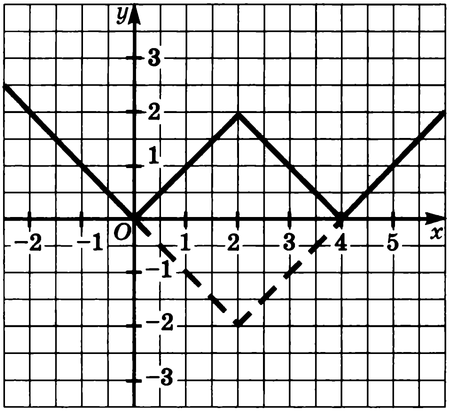



Рис. 41

Пример 3. Построим график функции $y = ||x - 2| - 2|$.

Построение выполняем последовательно: сначала строим график функции $y = |x - 2| - 2$, а затем строим данный график (рис. 41).

**134.** Постройте график функции:

а) $y = |0{,}5x - 1|$; в) $y = |x^2 + 2x|$; д) $y = \left|-\frac{6}{x} + 2\right|$;

б) $y = |1 - x^2|$; г) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$; е) $y = |x^3|$.

**135.** Постройте график функции:

а) $y = 2|x| - 1$; в) $y = \frac{4}{|x|} - 2$;

б) $y = x^2 + 2|x|$; г) $y = \sqrt{|x| - 4}$.

**136.** Даны функции

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3| \text{ и } g(x) = x^3 - 6|x| + 8.$$

Для каждой из этих функций найдите:

а) область определения;
б) область значений;
в) нули функции;
г) промежутки возрастания и промежутки убывания.

**137.** Область определения функции $y = f(x)$ — промежуток $[-10; 16]$, а область ее значений — промежуток $[-4; 7]$. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$.

**138.** Зная, что $-5 \leqslant f(x) \leqslant 6$, найдите границы для функции:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$.

**139.** Область определения функции $y = g(x)$ — множество $\boldsymbol{R}$. Известно также, что $g(x) = 0$, если $x = -5$ и $x = 1$; $g(x) \geqslant 0$, если $x \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. Найдите нули функций $y = |g(x)|$ и $y = g(|x|)$ и промежутки, на которых каждая из этих функций принимает положительные (отрицательные) значения.

**140.** Постройте график функции:

а) $y = |x - 1| - 1$;
б) $y = \big||x - 1| - 1\big|$;
в) $y = \Big|\big||x - 1| - 1\big| - 1\Big|$;
г) $y = \big|1 - |x|\big|$;
д) $y = \Big|1 - \big|1 - |x|\big|\Big|$;
е) $y = \bigg|1 - \Big|1 - \big|1 - |x|\big|\Big|\bigg|$.

**141.** Изобразите схематически график функции:

а) $y = |x^2 - 6|x| + 8|$;
б) $y = |2|x| - x^2|$;
в) $y = \dfrac{|x| - 3}{|x| + 3}$;
г) $y = \left|\dfrac{x - 4}{x + 1}\right|$.

**142.** Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}, \text{ если } x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Задайте эту функцию одной формулой.

**143.** Постройте график функции:

а) $y = |2 \cdot |x| - 2| + 1$; б) $y = |2 \cdot |x| + 4| - 3$.

**144.** Нулями функции $\varphi(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ являются числа 1, 2 и 3. Найдите нули функции $y = \varphi(|x|)$.

## Упражнения для повторения

**145.** Упростите выражение $\frac{a^2 - a - 30}{0{,}5a - 3} + \frac{2a^2 - 15a - 50}{2a + 5}$.

**146.** Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку $A(1;\ 3)$, а ее вершина принадлежит прямой $x = 0{,}5$. Найдите координаты пересечения этой параболы с осью $y$.

**147.** Разложите многочлен $2y^3 - 15y^2 + 28y$ на множители.

**148.** Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $\frac{1}{\sqrt{3} + 1}$.

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Как построить график функции $y = f(-x)$ и график функции $y = -f(-x)$, зная график функции $y = f(x)$? Объясните на примере.

**2.** Как выполняется построение графиков функций $g = |f(x)|$ и $g = f(|x|)$? Проведите обоснование.

## Дополнительные упражнения к главе 1

### К параграфу 1

**149.** Докажите, что функция

а) $y = \frac{7x - 31}{x - 5}$ убывает на промежутке $(5;\ +\infty)$;

б) $y = \frac{6x - 17}{x - 2}$ возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0]$.

**150.** Выясните характер монотонности функции:

а) $y = \sqrt{2x - 1}$;

б) $y = \sqrt{3 - 5x}$;

в) $y = x^4 + \sqrt{x - 1}$;

г) $y = |x| - \sqrt{x}$, где $x \geqslant 1$.

**151.** Докажите, что функция $f$ является возрастающей, если:

а) $f(x) = \sqrt{x - 1} + x^3$;

б) $f(x) = x^5 + 10x - 15$;

в) $f(x) = x^6 + x^3 + 1$, где $x \geqslant 0$;

г) $f(x) = x^2 - \frac{6}{x}$, где $x > 0$.

**152.** Докажите, что функция $g$ является убывающей, если:

а) $g(x) = x^2 + \sqrt{-x}$;

б) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - x$;

в) $g(x) = 1 - x - x^3 - x^5$;

г) $g(x) = |x + 3| + |x - 3|$, где $x < -5$.

**153.** Определите характер монотонности функции:

а) $f(x) = \sqrt{-x^3}$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$, где $x < 0$.

**154.** Найдите $x_0$, зная, что

а) $f(x) = \sqrt{x - 2} + x^3 + x^2 + x + 1$ и $f(x_0) = 41$;

б) $g(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 4$ и $g(x_0) = 58$.

**155.** Решите уравнение $x^3 - (5 - x)^3 + 2x = 71$.

**156.** Является ли функция четной или нечетной, если:

а) $f(x) = (x + 1)\,|x| + (x - 1)\,|x|$;

б) $f(x) = (x + 1)\,|x| - (x - 1)\,|x|$;

в) $g(x) = \dfrac{|x|}{x - 3} + \dfrac{|x|}{x + 3}$;

г) $g(x) = \dfrac{|x|}{x - 3} + \dfrac{|x|}{x + 3}$?

**157.** Решите уравнение:

а) $x^2 - 12|x| + 35 = 0$;

б) $x^2 + 5|x| - 24 = 0$.

**158.** Докажите, что если уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет два положительных корня, то уравнение $x^2 + b|x| + c = 0$ имеет четыре корня.

**159.** Используя свойства монотонных функций, решите уравнение:

а) $\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + \sqrt{5x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 8} = 7$;

б) $\sqrt{x^4 + 19} + \sqrt{x^2 + 7} + \sqrt{x^2 - 8} = 15$.

**160.** Докажите, что функция $f$ является ограниченной и укажите ее верхнюю и нижнюю границы:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 8}$;

б) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 19}{x^2 + 9}$;

в) $f(x) = \sqrt{10x - x^2 - 16}$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$.

**161.** Найдите область значений функции:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$; в) $f(x) = 1 - \sqrt{9 - |x - 2|}$;

б) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$; г) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{x - 2} + 1}$.

**162.** Укажите верхнюю и нижнюю границы площади $S$ прямоугольного треугольника, зная, что длина $a$ одного из его катетов заключена в границах $5 \leqslant a \leqslant 6$, а длина другого его катета на 3 единицы больше длины меньшего катета.

**163.** Найдите значения аргумента, при которых функция $g$ имеет наибольшее или наименьшее значения (если они существуют), и соответствующие им значения функции:

а) $g(x) = \dfrac{4x^2}{2x^2 + 3}$; в) $g(x) = 8 - \sqrt{1 - \sqrt{3x^2 + 4\sqrt{3}x + 4}}$;

б) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 12}$; г) $g(x) = \dfrac{x^2 + 18x + 81}{x^2 + 18x + 80}$.

**164.** Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{|x|}{x} \cdot x^3$; г) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

б) $y = \dfrac{|x - 4|}{x - 4} \cdot \sqrt{x}$; д) $y = \dfrac{|x + 3| + |x - 3|}{x}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; е) $y = \dfrac{|x + 2| - |x - 2|}{x}$.

**165.** Функция задана несколькими формулами:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -3x, \text{ если } x < -2, \\ 4 - x, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x + 4, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Задайте функцию одной формулой.

**166.** Выясните, является ли функция четной или нечетной, и постройте график функции:

а) $g(x) = \dfrac{9}{x^2 + 1}$; в) $g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$;

б) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$; г) $g(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

## К параграфу 2

**167.** Найдите расстояние $d$ от оси симметрии параболы $y = x^2 + px + q$ (зная, что $h^2 - 4q > 0$) до точек пересечения параболы с осью $x$.

Найдите значение $d$, если:

а) $p = -6$; $q = 3$; б) $p = 10$; $q = 17$.

**168.** При каких значениях параметра $k$ график функции

$$y = 4x^2 + 3kx - k^2 + 1$$

а) пересекает ось $x$ в двух точках;

б) касается оси $x$;

в) не имеет с осью $x$ общих точек?

**169.** При каком значении параметра $p$ функция

$$y = 3x^2 + 6px + 4p^2$$

а) возрастает на промежутке $[4; +\infty)$;

б) убывает на промежутке $(-\infty; -5]$?

**170.** При каком значении параметра $a$ функция

$$y = ax^2 - 6x + 1$$

а) принимает положительные значения на промежутках

$$\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{2}; +\infty\right);$$

б) принимает отрицательные значения на промежутках

$$\left(-\infty; -\frac{1}{7}\right) \text{ и } (1; +\infty);$$

в) имеет отрицательные значения на промежутке $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$;

г) имеет положительные значения на промежутке $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$;

д) является монотонной на всей области определения?

**171.** Найдите коэффициенты квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c,$$

зная, что ее график проходит через точки $A(0; 2)$, $B(2; 0)$, $C(3; 8)$.

## К параграфу 3

**172.** Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x-4} - 1$;

б) $y = \sqrt{4-x} - 2$;

в) $y = \frac{|x|}{x}(x^2 - 1)$;

г) $y = \frac{|x|}{x}(x^2 - 2x)$;

д) $y = \begin{cases} -x^2 + 2x, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x^2 - 2x + 2, \text{ если } x > 1; \end{cases}$

е) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x^2 + 2x + 2, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

**173.** Известно, что функция $y = \varphi(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; -2]$, убывает на промежутке $[4; +\infty)$ и сохраняет постоянное значение на промежутке $[-2; 4]$. Изобразите схематически график функции $y = \varphi(x)$ и график функции $y = \varphi(-x)$, если $D(\varphi) = \boldsymbol{R}$.

**174.** Известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 5]$ и убывает на промежутке $[5; +\infty)$. Укажите промежутки, на которых возрастает и на которых убывает функция:

а) $y = f(-x)$;

б) $y = -f(-x)$.

**175.** Постройте график функции:

а) $y = |x^2 + |x| - 2|$;

б) $y = |-6x^2 + 7|x| - 3|$;

в) $y = x(|x| - 3)$;

г) $y = |x - 2|(x + 2)$.

**176.** Задайте одной формулой функцию:

а) $y = \begin{cases} x^2 - 8x + 7, \text{ если } x < 0, \\ x^2 + 8x + 7, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \dfrac{-x^3 + 3x - 1}{-4x + 3}, \text{ если } x < 0, \\ \dfrac{x^3 + 3x - 1}{4x + 3}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1 - x, \text{ если } x > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 6 - x, \text{ если } x < 3, \\ x, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases}$

**177.** Постройте график функции:

а) $y = [2x]$;

б) $y = \{-0{,}5x\}$.

# ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## § 4. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 9. Целое уравнение и его корни

Вам неоднократно приходилось решать уравнения с одной переменной, обе части которых были целыми выражениями. Такие уравнения называются *целыми уравнениями*.

Определение. **Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая части которого — целые выражения.**

Примерами целых уравнений могут служить уравнения

$$0{,}7x^7 - 3x^5 - x = 5;$$

$$\left(\sqrt{3} - x^2\right)\left(\sqrt{2} - x^3\right) = x^6;$$

$$\frac{(x^3 - 8)x}{2} + 1 = \frac{x^2}{4} - 4x.$$

Из определения целого уравнения и условий перехода к равносильному уравнению с одной переменной вытекает, что любое целое уравнение можно преобразовать в равносильное ему уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида.

Преобразуем, например, к такому виду уравнение

$$\frac{(x^3 - 8)x}{2} + 1 = \frac{x^2}{4} - 4x.$$

Для этого умножим обе части уравнения на 4, перенесем все его члены в левую часть, изменяя при этом знаки, и преобразуем в многочлен записанное в левой части уравнения целое выражение. Получим:

$$2(x^3 - 8)x + 4 = x^2 - 16x,$$
$$2(x^3 - 8)x + 4 - x^2 + 16x = 0,$$
$$2x^4 - x^2 + 4 = 0.$$

*Степенью уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида, называется степень этого многочлена. Степенью произвольного целого уравнения называется степень равносильного ему уравнения указанного вида.*

Заметим, что если в многочлене $P(x)$ все коэффициенты при степенях переменной $x$ и свободный член равны нулю, то степень такого многочлена не определена, а значит, не определена и степень соответствующего уравнения.

В рассмотренном примере мы получили уравнение

$$2x^4 - x^2 + 4 = 0,$$

которое является уравнением четвертой степени. Значит, равносильное ему исходное целое уравнение также является уравнением четвертой степени.

Целое уравнение первой степени можно привести к виду

$$ax + b = 0, \text{ где } a \neq 0, \tag{1}$$

а второй степени — к виду

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0. \tag{2}$$

Соответственно, целые уравнения третьей и четвертой степени можно привести к виду

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ где } a \neq 0,$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Вообще целое уравнение $n$-й степени приводится к виду

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q = 0,$$

где $x$ — переменная, $a, b, c, \ldots, p, q$ — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Корень уравнения первой степени (1) вычисляется, как известно, по формуле $x = -\frac{b}{a}$, а корни уравнения второй степени (2) находятся по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$, $D \geqslant 0$. Для уравнений третьей и четвертой степеней также известны формулы корней, но они очень сложны и практически ими не пользуются. Для уравнений пятой степени, а также более высоких степеней, как доказал в 20-х годах XIX века норвежский математик Н. Абель (1802—1829), формул корней вообще не существует.

Уравнение первой степени имеет один корень, уравнение второй степени имеет не более двух корней. Можно доказать, что вообще уравнение $n$-й степени имеет не более $n$ корней.

Если уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то его можно найти, используя следующую теорему.

Теорема. ***Если уравнение***

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

***в котором все коэффициенты — целые числа, причем свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.***

Доказательство. Пусть некоторое целое число $m$ является корнем данного уравнения. Тогда верно равенство

$$a_0m^n + a_1m^{n-1} + \dots + a_{n-1}m + a_n = 0.$$

Отсюда

$$a_n = -a_0m^n - a_1m^{n-1} - \dots - a_{n-1}m,$$

т. е.

$$a_n = m(-a_0m^{n-1} - a_1m^{n-2} - \dots - a_{n-1}).$$

В правой части этого равенства записано произведение двух множителей, первый из которых является целым числом по предположению, а второй — в силу того, что произведение и сумма целых чисел является целым числом, причем каждый из этих множителей отличен от нуля, так как $a_n \neq 0$. Следовательно, по определению, $a_n$ делится на $m$, т. е. целый корень многочлена является делителем свободного члена. Теорема доказана.

Приведем примеры применения этой теоремы.

---

*Нильс Хенрик Абель* (1802—1829) — норвежский математик, один из крупнейших математиков XIX века. Исключительные математические способности начал проявлять с 16 лет. Работы Абеля оказали большое влияние на развитие всей математики. Они привели к появлению ряда новых математических дисциплин (теории Галуа, теории алгебраических функций) и содействовали всеобщему признанию теории функций комплексного переменного. Абель доказал, что алгебраические уравнения степени выше 4-й в общем случае неразрешимы в радикалах, указал также частные типы уравнений, разрешимых в радикалах. Абель — один из создателей теории эллиптических функций. Большое значение имеют его работы по обоснованию математического анализа. Абель написал первую работу, посвященную интегральным уравнениям. Работы Абеля оставили заметный след в теории интерполирования функций, теории функциональных уравнений и теории чисел.

Пример 1. Найдем целые корни уравнения

$$2x^4 - x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Делителями свободного члена являются числа 1, −1, 2, −2, 4, −4. Подставляя эти числа в уравнение, найдем, что его левая часть обращается в нуль при $x$, равном 1, −2, 2. Значит, уравнение имеет три целых корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

Ответ: 1, −2, 2.

Пример 2. Докажем, что уравнение

$$x^4 - 3x^3 + 3x + 2 = 0$$

не имеет рациональных корней.

Подставляя в уравнение делители свободного члена, т. е. числа 1, −1, 2, −2, убеждаемся, что уравнение не имеет целых корней. Докажем, что оно не имеет также дробных рациональных корней. Допустим, что несократимая дробь $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$, $q \neq 1$, является корнем уравнения. Тогда верно равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right)^4 - 3\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 3 \cdot \frac{p}{q} + 2 = 0,$$

а значит, и равенство

$$p^4 - 3p^3q + 3pq^3 + 2q^4 = 0,$$

полученное из него умножением обеих частей на $q^4$. Левая часть этого равенства не делится на $q$, так как представляет собой сумму, в которой все слагаемые, кроме первого, делятся на $q$, а правая часть равенства делится на $q$. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно и никакое дробное число не является корнем уравнения.

Итак, мы доказали, что уравнение не имеет рациональных корней.

Пример 3. Решим уравнение $636x^2 + 635x - 1 = 0$.

Применение формулы корней квадратного уравнения связано здесь с громоздкими вычислениями. Поступим иначе. Попытаемся найти целый корень уравнения. В силу доказанной теоремы, если уравнение имеет целый корень, то он является делителем числа −1, т. е. равен 1 или −1. Подставляя в уравнение вместо $x$ эти числа, убеждаемся, что число −1 является его корнем. Второй корень найдем, воспользовавшись теоремой Виета. Так как $x_1 = -1$ и $x_1x_2 = -\frac{1}{626}$, то $x_2 = \left(-\frac{1}{636}\right) : (-1)$, т. е. $x_2 = \frac{1}{636}$.

Ответ: −1 и $\frac{1}{636}$.

Пример 4. Решим уравнение $x^3 + x + 10 = 0$.

Испытывая делители свободного члена, находим, что один из корней уравнения равен $-2$. Других корней это уравнение не имеет. В самом деле, функцию $y = x^3 + x + 10$ можно рассматривать как сумму функций $y = x^3$ и $y = x + 10$, каждая из которых определена на $\boldsymbol{R}$ и является возрастающей. Значит, функция $y = x^3 + x + 10$ возрастающая и, по свойству монотонной функции, каждое свое значение, в частности значение, равное 0, она принимает только при одном значении аргумента.

Ответ: $-2$.

**178.** Является ли данное уравнение целым уравнением:

а) $\frac{x^3 - 6x}{8} - \frac{x^5}{3} = 1$;

б) $\sqrt{x - 1} = 19$;

в) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 18x = 4$;

г) $1{,}07x^2 - \frac{1}{3}x = 0{,}1$;

д) $\frac{1}{3}x^3 = \sqrt{2}x$;

е) $\frac{6}{x + 1} - 6x = 2$;

ж) $\frac{12x^3 - 2}{0{,}3} = 0{,}1x$;

з) $\frac{x^2 + 2x + 1}{(x + 1)^2} = x + 4$;

и) $\frac{22}{\sqrt{x}} = x^3 - 1$;

к) $\frac{x}{\sqrt{5}} = 2x^4 - x^6$?

**179.** Какова степень уравнения:

а) $\frac{1}{3}x^4 = \frac{x^3(x - 4)}{3}$;

б) $\frac{x + x^7}{4^3} = \frac{9 - x^7}{2^6}$;

в) $\frac{(x^2 - 4)(8x + 1)}{2x} = 4x^2 - 1$;

г) $\frac{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{4} = 0{,}25x^2$?

**180.** При каких значениях $a$ уравнение

а) $(ax^3 - 1)(ax^2 + 2) = 3ax^5$ является уравнением пятой степени;

б) $(2 - ax^5)(ax - 1) + 2x^6 = 0$ является уравнением шестой степени?

**181.** Докажите, что при любом значении $b$ уравнение

а) $(bx^2 - x + 1)(bx^5 - 2) = 3x^7(b - 5)$ является уравнением седьмой степени;

б) $(bx^6 - x^4)(bx^2 + x) + 14x^8 = 7bx^8$ является уравнением восьмой степени.

**182.** При каких значениях $a$

а) число $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ является корнем уравнения $x^4 - 2x^2 + 3a = 0$;

б) число $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ является корнем уравнения $x^4 - 6x^2 + 4a^2 = 0$?

**183.** Составьте какое-либо уравнение пятой степени вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида, если известно, что множеством его корней является множество $A$, где:

а) $A = \{0; -1; 1; 2; 3\}$;
б) $A = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -2; 3; 5\}$;
в) $A = \{1; 3; 5\}$;
г) $A = \{0; 4; -8\}$.

**184.** Имеет ли целые корни уравнение:

а) $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0$;
б) $x^6 - x^4 + x^2 + x - 2 = 0$?

**185.** Найдите целые корни уравнения:

а) $x^3 + x - 2 = 0$;
б) $6x^3 - 7x + 1 = 0$;
в) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 1 = 0$;
г) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$.

**186.** Докажите, что несократимая дробь $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$, $q \neq 1$, не может быть корнем уравнения

$$x^5 - 24x^4 + 17x^3 - 7x^2 + x - 2 = 0.$$

**187.** Докажите, что не имеет рациональных корней уравнение:

а) $x^5 - x^2 + 3 = 0$;
б) $x^5 - 3x^3 + x - 2 = 0$.

**188.** Докажите, что графики функций $y = x^3 + 6$ и $y = -3x + 1$ пересекаются в точке с иррациональной абсциссой.

**189.** Решите уравнение:

а) $2002x^2 - 2001x - 1 = 0$;
б) $116x^2 + 115x - 1 = 0$;
в) $37x^2 + 73x - 2 = 0$;
г) $57x^2 - 101x - 26 = 0$.

**190.** Решите уравнение:

а) $x^3 + 3x - 4 = 0$;
б) $x^3 + x - 10 = 0$;
в) $x^5 + x - 34 = 0$;
г) $2x^3 + x = 18$.

## Упражнения для повторения

**191.** При каких значениях $a$ произведение многочленов $x^3 + a^2x^2 + 4a$ и $x^3 + 3x^2 - x$ тождественно равно многочлену стандартного вида, не содержащему

а) $x^4$; б) $x^3$?

**192.** При каких значениях $a$ и $b$ график функции $y = ax^2 + bx - 4$ проходит через точки $A(-3; 2)$ и $B(1; 6)$?

**193.** Найдите область определения и область значений функции $y = x^2 - |x| - 12$.

## 10. Приемы решения целых уравнений

Целое уравнение третьей или более высокой степени в отдельных случаях удается решить, используя специальные приемы. Рассмотрим некоторые из них.

Один из приемов решения уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, степень которого выше двух, состоит в *разложении многочлена на множители*. С помощью разложения многочлена на множители удается иногда решение уравнения $n$-й степени, где $n \geqslant 3$, свести к решению уравнений более низких степеней.

Пример 1. Решим уравнение $4x^3 - 11x + 3 = 0$.

Разложим многочлен $4x^3 - 11x + 3$ на множители. Для этого одночлен $-11x$ представим в виде суммы $-9x - 2x$. Получим:

$$4x^3 - 9x - 2x + 3 = 0,$$
$$(4x^3 - 9x) - (2x - 3) = 0,$$
$$x(2x - 3)(2x + 3) - (2x - 3) = 0,$$
$$(2x - 3)(2x^2 + 3x - 1) = 0.$$

Из условия равенства нулю произведения вытекает, что полученное равенство верно, когда $2x - 3 = 0$ или когда $2x^2 + 3x - 1 = 0$. Говорят, что данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$2x - 3 = 0 \text{ или } 2x^2 + 3x - 1 = 0.$$

В записи для обозначения совокупности используют иногда квадратную скобку, например пишут: $\left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 0, \\ 2x^2 + 3x - 1 = 0. \end{array}\right.$

Множеством корней исходного уравнения является объединение множеств корней уравнений, входящих в эту совокупность. Решив каждое из уравнений, найдем, что исходное уравнение имеет три корня:

$$x_1 = 1{,}5;\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4};\ x_3 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}.$$

Ответ: $1{,}5;\ \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{4};\ \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}$.

Для разложения на множители многочлена третьей или более высокой степени бывает удобно иногда воспользоваться теоремой о корне многочлена.

Теорема. ***Если число $a$ является корнем многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0$, то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x - a)\,P_1(x)$, где $P_1(x)$ — многочлен $(n - 1)$-й степени.***

Доказательство. Так как число $a$ является корнем многочлена $P(x)$, то $P(a) = 0$. Составим разность и преобразуем ее:

$$P(x) - P(a) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n -$$
$$- (a_0a^n + a_1a^{n-1} + \ldots + a_{n-1}a + a_n) =$$
$$= a_0(x^n - a^n) + a_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - a).$$

Пользуясь формулой разности $n$-х степеней, представим каждую разность вида $x^m - a^m$, где $m \in N$, $m > 1$, в виде произведения двух множителей, один из которых равен $x - a$. Выполнив вынесение множителя за скобки и преобразовав выражение в скобке в многочлен, получим

$$P(x) - P(a) = (x - a)\, P_1(x),$$

где $P_1(x)$ — многочлен $(n - 1)$-й степени.

Так как $P(a) = 0$, то отсюда следует, что

$$P(x) = (x - a)\, P_1(x).$$

Доказанная теорема является следствием более общего утверждения:

*Остаток от деления многочлена*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

*на двучлен $x - a$ равен $P(a)$.*

Это утверждение называют теоремой Безу. Она была впервые сформулирована и доказана французским математиком Этьеном Безу (1730—1783), основные труды которого относятся к высшей алгебре.

Пример 2. Решим уравнение $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$.

Если данное уравнение имеет целый корень, то он является делителем числа $-1$, т. е. равен 1 или $-1$. Проверка убеждает нас, что число $-1$ — корень уравнения. Значит, в силу доказанной

---

*Этьен Безу* (1730—1783) — французский математик, член Парижской академии наук. Основные труды по алгебре — исследование свойств систем алгебраических уравнений высших степеней и исключение неизвестных в таких системах — сыграли немаловажную роль в развитии теории определителей. Теорема об остатке от деления многочлена на линейный двучлен содержалась в книге «Общая теория алгебраических уравнений», опубликованной в Париже в 1779 году.

теоремы, его левую часть можно представить в виде произведения $(x + 1)\,P(x)$, где $P(x)$ — многочлен второй степени.

Для того чтобы найти многочлен $P(x)$, разделим $x^3 - x^2 - 3x - 1$ на $(x + 1)$.

Деление многочленов выполним «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,\underline{\begin{array}{l} x^3 - x^2 - 3x - 1 \\ x^3 + x^2 \end{array}} & \underline{x+1} \\
-\,\underline{\begin{array}{r} -2x^2 - 3x \\ -2x^2 - 2x \end{array}} & x^2 - 2x - 1 \\
-\,\underline{\begin{array}{r} -x - 1 \\ -x - 1 \end{array}} & \\
0 &
\end{array}
$$

Итак,

$$x^3 - x^2 - 3x - 1 = (x + 1)(x^2 - 2x - 1).$$

Из уравнения

$$(x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

получаем

$$x + 1 = 0 \text{ или } x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Решив эти уравнения, найдем, что данное уравнение третьей степени имеет три корня:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1 - \sqrt{2},\ x_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Ответ: $-1$; $1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$.

Для решения целых уравнений третьей или более высокой степени иногда используют известный вам *метод введения новой переменной*. Рассмотрим применение этого метода при решении возвратных уравнений 4-й степени.

*Возвратным уравнением* называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \text{ где } a_0 \neq 0,$$

в котором $a_k = a_{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Возвратное уравнение четвертой степени в общем виде можно записать так:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Так как число 0 не является его корнем, то такое уравнение можно решить, разделив обе его части на $x^2$ и введя переменную $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Особенность этого уравнения четвертой степени состоит в том, что коэффициенты, одинаково удаленные от начала и конца, равны между собой. Разделим обе части уравнения на $x^2$. Это можно сделать, не нарушая равносильности, так как число 0 не является корнем уравнения. Получим

$$x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем первый член с последним, а второй — с предпоследним и вынесем за скобки во второй группе множитель −2:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Введем новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2$, т. е.

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Получаем уравнение

$$(y^2 - 2) - 2y - 1 = 0, \text{ т. е.}$$
$$y^2 - 2y - 3 = 0.$$

Решив его, найдем, что $y_1 = -1$, $y_2 = 3$.
Значит,

$$x + \frac{1}{x} = -1 \text{ или } x + \frac{1}{x} = 3.$$

Первое из этих уравнений не имеет корней, а второе имеет корни $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ и $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Значит, заданное уравнение $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ имеет корни $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ и $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$; $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Еще одним методом, который используется при решении целых уравнений, является *метод неопределенных коэффициентов*. Разъясним его на примере.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 10x - 3 = 0.$$

Подставляя в уравнение делители свободного члена, найдем, что оно имеет корни: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Значит, это уравнение можно представить в виде

$$(x + 1)(x - 3)(x^2 + px + q) = 0.$$

Коэффициенты $p$ и $q$ найдем из равенства

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 + px + q) = x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 10x - 3.$$

Получаем

$$\begin{cases} -3q = -3, \\ -3 - 2p + q = 6. \end{cases}$$

Отсюда $q = 1$, $p = -4$.

Следовательно, исходное уравнение приводится к виду

$$(x + 1)(x - 3)(x^2 - 4x + 1) = 0.$$

Из равенства $x^2 - 4x + 1 = 0$ найдем остальные корни уравнения: $x_3 = 2 - \sqrt{3}$, $x_4 = 2 + \sqrt{3}$.

Ответ: $-1$; $3$; $2 - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$.

Приближенные значения корней некоторых целых уравнений удается иногда найти, используя *графический способ*.

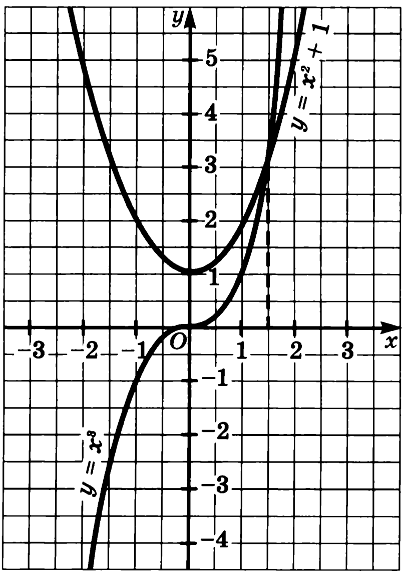



Рис. 42

Пример 5. Решим уравнение $x^3 - x^2 - 1 = 0$.

Представим данное уравнение в виде $x^3 = x^2 + 1$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^3$ и $y = x^2 + 1$ (рис. 42). Эти графики пересекаются в точке, абсцисса которой приближенно равна 1,5. Значит, уравнение $x^3 - x^2 - 1 = 0$ имеет корень $x \approx 1{,}5$.

В рассмотренном примере мы не можем утверждать, что нашли приближенное значение корня с точностью до 0,1. Вполне возможно, что из-за неточности чертежа была допущена ошибка. При необходимости корни, найденные графическим способом, уточняют с помощью вычислений. Для уточнения корней используется следующее свойство: если график функции $y = f(x)$ представляет собой непрерывную линию и на концах некоторого промежутка $[a;\ b]$ функция принимает значения разных знаков, то внутри этого промежутка находится корень уравнения $y = f(x)$ (рис. 43).

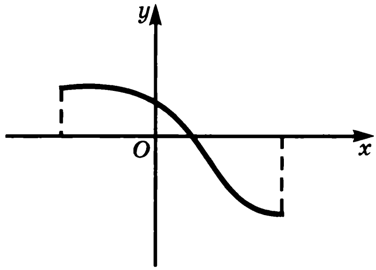


Рис. 43

Уточним корень уравнения $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Рисунок 42 позволяет предположить, что корень уравнения принадлежит промежутку $[1;\ 2]$. Действительно, выполнив подстановку в формулу $f(x) = x^3 - x^2 - 1$, убеждаемся, что $f(1) < 0$, а $f(2) > 0$.

Разделим отрезок координатной прямой с концами 1 и 2 на десять равных частей точками:

$$1{,}0;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ \dots;\ 1{,}8;\ 1{,}9;\ 2{,}0.$$

Будем вычислять значения функции на концах каждого из образовавшихся отрезков, используя при необходимости калькулятор. Чтобы уменьшить число испытаний, начнем с точки 1,5. Имеем $f(1{,}5) = 1{,}5^3 - 1{,}5^2 - 1 = 3{,}375 - 2{,}25 - 1 > 0$. Учитывая, что $f(1) < 0$, можно заключить, что корень уравнения принадлежит промежутку $[1{,}0;\ 1{,}5]$. Сравнивая с нулем значения функции на концах отрезков, определяемых точками 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5, находим, что $f(1{,}4) < 0$, а $f(1{,}5) > 0$. Значит, корень уравнения принадлежит промежутку $[1{,}4;\ 1{,}5]$. Каждое из чисел 1,4 и 1,5 является корнем уравнения $x^3 - x^2 - 1 = 0$ с точностью до 0,1.

Аналогично можно найти приближенные значения корней этого уравнения с точностью до 0,01, 0,001 и т. д.

**194.** Решите уравнение:

а) $x^5 - 0{,}16x^3 = 0$; в) $p = 11p^5 + 12p^4$;

б) $1{,}2y^3 - 6y = 0$; г) $2x^3 = x^2 - 6x$.

**195.** Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = x^4 - 5x^2$; в) $y = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$;

б) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$; г) $y = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 14$.

**196.** Укажите координаты точек пересечения графика функции $y = ax^3 - 3x^2 - 2x + 3$ с осью $x$, если известно, что одной из этих точек является точка $A(1{,}5;\ 0)$.

**197.** Решите уравнение:

а) $x^3 + 9x - 10 = 0$;
б) $m^3 - 5m - 2 = 0$;
в) $x^3 + 2x + 3 = 0$;
г) $p^3 - 3p + 2 = 0$;
д) $2t^3 - t^2 - 1 = 0$;
е) $4x^3 - 5x + 1 = 0$.

**198.** Решите уравнение:

а) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$;
б) $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
в) $y^3 - y^2 - 8y + 12 = 0$;
г) $y^3 - y^2 - 14y + 24 = 0$.

**199.** Найдите корни уравнения:

а) $x^3 = x^2 - 2$;
б) $x^3 + x^2 - x + 2 = 0$;
в) $x^3 + x^2 - 7x + 5 = 0$;
г) $(x + 2)^3 + 2(x - 1)^2 = 66$;
д) $(x + 3)^3 - (x - 1)^2 - 4 = 0$;
е) $(x - 3)^3 + 8(x - 2)^2 = 0$.

**200.** Решите уравнение, используя разложение на множители:

а) $x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$;
б) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$;
в) $x^5 - 3x^3 + x^2 - 3 = 0$;
г) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

**201.** Решите уравнение:

а) $(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 16$;
б) $(t - 3)^4 + (t + 1)^4 = 256$.

**202.** Решите уравнение:

а) $x^3(x + 1) - x^2(x - 2) = 24$;
б) $(x^2 + 1)(x^2 + 3) = 32 - 4x^2(x^2 + 5)$;
в) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) + x^3(2x - 1) = 242 - x^3$.

**203.** Найдите нули функции:

а) $y = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3$;
б) $y = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 4x + 8$;
в) $y = 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 2$.

**204.** Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x^2 + 4x)^2 - (x + 2)^2 = 416$;
б) $(x^2 - 2x)^2 + (x - 1)^2 = 73$;
в) $(x^2 + 6x)^2 - 4(x + 3)^2 = 156$;
г) $3(x^2 + 2x)^2 = 35(x + 1)^2 + 115$.

**205.** Запишите в общем виде возвратное уравнение: а) пятой степени; б) третьей степени; в) второй степени; г) первой степени.

**206.** Докажите, что возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $-1$.

**207.** Решите возвратное уравнение:
а) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$;
б) $x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$;
в) $4x^4 - 8x^3 - 37x^2 - 8x + 4 = 0$;
г) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$.

**208.** Зная, что один из корней уравнения $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 12x + a = 0$ равен 2, найдите $a$ и другие корни уравнения.

**209.** Решите уравнение:
а) $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 7x - 2 = 0$; б) $x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$.

**210.** Решите уравнение, разложив его левую часть на множители методом неопределенных коэффициентов:
а) $2x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0$; в) $2x^4 + 7x^3 + x^2 - 8x + 2 = 0$;
б) $3x^4 + 3x^3 - 8x^2 + x - 3 = 0$; г) $2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 13x - 4 = 0$.

**211.** С помощью графиков решите уравнение $x^3 + 2x - 1 = 0$. Найдите две последовательные десятичные дроби с одним знаком после запятой, между которыми заключен его корень.

**212.** Решите графически уравнение $x^3 - x - 2 = 0$. С помощью вычислений уточните до 0,01 найденное значение корня.

### Упражнения для повторения

**213.** Изобразите схематически график функции и укажите область значений этой функции:
а) $y = x^2 - 6x + 8$; в) $y = x^2 - 6|x| + 8$.
б) $y = |x^2 - 6x + 8|$;

**214.** При каких $x$ значения функции $y = -0{,}5x + 3{,}6$ принадлежат промежутку $[2; 4]$?

**215.** При каких $a$ и $b$ график функции $y = ax^2 - 2bx + 1$ проходит через точки $M(-1; 3)$ и $P(2; 4)$?

**216.** Является ли рациональным или иррациональным числом абсцисса точки пересечения графиков функций $y = x^3 - 4$ и $y = -2x + 2$?

## 11. Решение дробно-рациональных уравнений

Уравнение, левая и правая части которого представляют собой рациональные выражения, называют, как известно, рациональным уравнением. Если обе части рационального уравнения или хотя бы одна из них являются дробными выражениями, то такое уравнение называется *дробно-рациональным уравнением.* Примерами дробно-рациональных уравнений могут служить уравнения:

$$\frac{x-4}{x^2-1}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1};$$

$$\frac{5}{x+4}=3x-2;$$

$$6x^2-1=\frac{\sqrt{3}}{x}.$$

Любое дробно-рациональное уравнение можно заменить равносильным уравнением вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \qquad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Уравнению (1) удовлетворяют те и только те значения $x$, при которых $P(x)=0$ и $Q(x)\neq 0$, т. е. уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

Отсюда вытекает известный вам общий прием решения дробно-рациональных уравнений, который состоит в следующем:

— умножают обе части уравнения на общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

— решают полученное целое уравнение;

— исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей.

Пример 1. Решим уравнение

$$\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=x^2.$$

Умножив обе части уравнения на $x-2$, получим целое уравнение

$$2x^2-3x-2=x^3-2x^2,$$

которое приводится к виду

$$x^3-4x^2+3x+2=0.$$

Полученное целое уравнение равносильно уравнению

$$(x-2)(x^2-2x-1)=0$$

и имеет три корня: 2, $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$.

Если $x=2$, то $x-2=0$; если $x=1-\sqrt{2}$, то $x-2\neq 0$; если $x=1+\sqrt{2}$, то $x-2\neq 0$.

Значит, число 2 не является корнем исходного уравнения, а числа $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$ являются его корнями.

Ответ: $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$.

Иногда дробно-рациональное уравнение удается решить, используя какие-либо нестандартные преобразования.

Пример 2. Решим уравнение $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+5}{x+4}+\frac{x+8}{x+7}$.

Умножение обеих частей уравнения на общий знаменатель дробей связано со сложными тождественными преобразованиями. Поступим иначе. Выделим в каждой дроби целую часть:

$$1+\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x+3}=1+\frac{1}{x+4}+1+\frac{1}{x+7}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+7}.$$

Для того чтобы упростить преобразования, сложим отдельно дроби в левой и правой частях уравнения. Получим

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{2x+11}{(x+4)(x+7)}.$$

Умножение обеих частей полученного уравнения на общий знаменатель дробей приводит к уравнению

$$(x+4)(x+7)=(2x+11)(x+2)(x+3).$$

Раскрывая скобки и перенося все члены уравнения в левую часть, получаем

$$x^2+11x+28=(2x+11)(x^2+5x+6),$$
$$x^2+11x+28=2x^3+10x^2+12x+11x^2+55x+66,$$
$$2x^3+20x^2+56x+38=0,$$
$$x^3+10x^2+28x+19=0.$$

Полученное уравнение третьей степени равносильно уравнению

$$(x+1)(x^2+9x+19)=0$$

и имеет три корня:

$$x_1=-1,\ x_2=-4{,}5-\sqrt{1{,}25},\ x_3=-4{,}5+\sqrt{1{,}25}.$$

При каждом из этих значений $x$ произведение

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+7)$$

не обращается в нуль.

Значит, исходное уравнение имеет три корня:

$$-1,\ -4{,}5-\sqrt{1{,}25},\ -4{,}5+\sqrt{1{,}25}.$$

Ответ: $-1$; $-4{,}5-\sqrt{1{,}25}$; $-4{,}5+\sqrt{1{,}25}$.

В отдельных случаях удается решить дробно-рациональное уравнение, используя введение новой переменной.

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)}+\frac{7}{(x+5)(x-4)}+\frac{1}{4}=0.$$

Выполнив умножение двучленов в знаменателях дробей, получим

$$\frac{1}{x^2+x-2}+\frac{7}{x^2+x-20}+\frac{1}{4}=0.$$

Введем новую переменную $y = x^2 + x$. Получим уравнение

$$\frac{1}{y-2}+\frac{7}{y-20}+\frac{1}{4}=0.$$

Отсюда

$$4y - 80 + 28y - 56 + y^2 - 2y - 20y + 40 = 0,$$
$$y^2 + 10y - 96 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем, что

$$y_1 = -16,\ y_2 = 6.$$

Каждое из найденных значений удовлетворяет дробно-рациональному уравнению с переменной $y$, так как не обращает в нуль общий знаменатель дробей. Значит,

$$x^2 + x = -16 \text{ или } x^2 + x = 6.$$

Решая каждое из этих уравнений, найдем, что первое из них не имеет корней, а второе имеет корни: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

При $x = -3$ и $x = 2$ общий знаменатель дробей, входящих в исходное уравнение, не обращается в нуль. Значит, исходное уравнение имеет два корня: $-3$ и 2.

Ответ: $-3$; 2.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^3+\frac{1}{x^3}=3\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Введем вспомогательную переменную $y = x + \frac{1}{x}$. Выразим через $y$ сумму $x^3 + \frac{1}{x^3}$. Имеем:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Из равенства $y = x + \frac{1}{x}$ находим, что $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, т. е. $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Итак, получаем уравнение

$$y(y^2 - 3) = 3\frac{1}{4}y.$$

Отсюда

$$y\left(y^2 - 3 - 3\frac{1}{4}\right) = 0,$$

$$y = 0 \text{ или } y^2 = 6\frac{1}{4},$$

$$y = 0 \text{ или } y = -\frac{5}{2} \text{ или } y = \frac{5}{2}.$$

Решая уравнения

$$x + \frac{1}{x} = 0, \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2},$$

найдем, что первое из них не имеет корней, второе имеет корни $-2$ и $-\frac{1}{2}$, а третье имеет корни $\frac{1}{2}$ и 2. Так как $x^3 \neq 0$ при этих значениях $x$, то каждое из них является корнем исходного уравнения.

Ответ: $-2$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 2.

В рассмотренных примерах несложно было выбрать подстановку, позволяющую перейти к более простому уравнению. Иногда для этого требуется предварительно выполнить некоторые преобразования.

Пример 5. Решим уравнение $\frac{x^3 + 2x}{(x^2 - x + 2)^2} = \frac{3}{4}$.

Легко проверить, что число 0 не является корнем уравнения. Разделим числитель и знаменатель дроби, записанной в левой части уравнения, на $x^2$. Получим равносильное уравнение

$$\frac{x + \frac{2}{x}}{\left(x - 1 + \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

Пусть $x + \frac{2}{x} = y$. Тогда $\frac{y}{(y - 1)^2} = \frac{3}{4}$.

Решив это уравнение, найдем, что $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{1}{3}$. Значит,

$$x + \frac{2}{x} = 3 \text{ или } x + \frac{2}{x} = \frac{1}{3}.$$

Первое из этих уравнений имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, второе уравнение корней не имеет. Так как $x^2 - x + 2 \neq 0$ при $x = 1$ и $x = 2$, то исходное уравнение имеет два корня: 1 и 2.

Ответ: 1; 2.

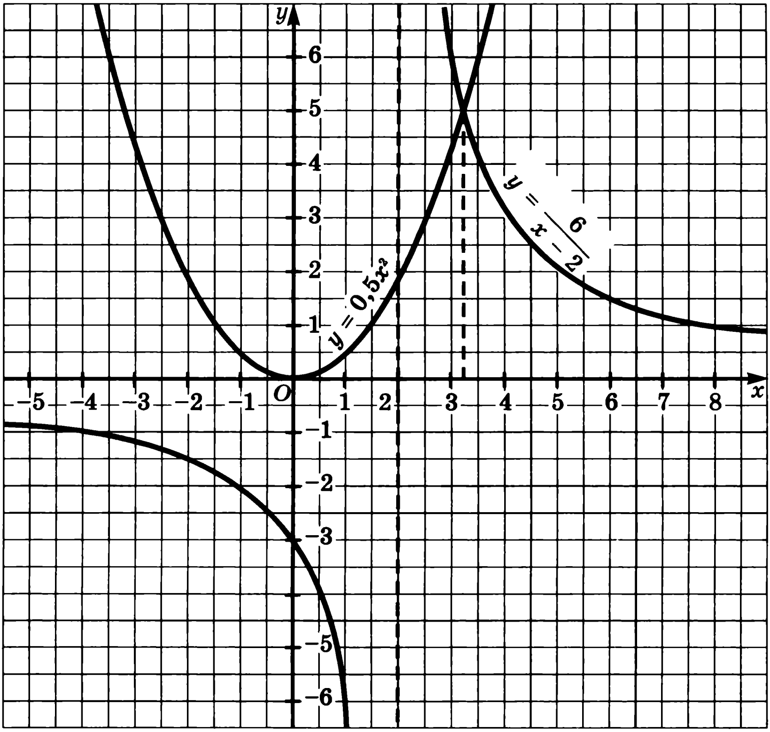



Рис. 44

Иногда удается найти приближенные значения корней дробно-рационального уравнения, используя графический метод.

Пример 6. Решим уравнение $\frac{6}{x-2} = 0{,}5x^2$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = \frac{6}{x-2}$ и $y = 0{,}5x^2$ (рис. 44). Графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой приближенно равна 3,2. Значит, данное уравнение имеет единственный корень $x \approx 3{,}2$.

**217.** Решите уравнение:

а) $\frac{x^2+1}{x-2} - \frac{x^2-1}{x+1} = 8;$

б) $\frac{x^3-2}{x-2} - x^2 = 2;$

в) $\frac{2x+1}{x^3+8} + \frac{2x}{x^2-2x+4} = \frac{3}{x+2};$

г) $\frac{2p+7}{8p^3+1} - \frac{2}{2p+1} - \frac{5p}{4p^2-2p+1} = 0.$

**218.** Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{x+5}{x^2-6x+8}+\dfrac{1}{x^2-7x+10}=\dfrac{1}{x-2}$;

б) $\dfrac{2x-3}{x^2-x-42}-\dfrac{3}{x^2-11x+28}=\dfrac{2}{x-7}$.

**219.** Докажите, что не имеет корней уравнение:

а) $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{1-4x^2}-\dfrac{3x-1}{6x-3}=0$;

б) $\dfrac{12x}{2x-1}-\dfrac{23}{x+4}=\dfrac{1}{2x^2+7x-4}$;

в) $\dfrac{x(x^2-1)}{3(x-2)}+\dfrac{x+4}{6-3x}=0$.

**220.** Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{1}{x+10}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x+8}-\dfrac{1}{x-3}$;

б) $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-1}$;

в) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+11}{x+10}=\dfrac{2x-5}{2x-7}-\dfrac{x-1}{x-2}$;

г) $\dfrac{2x+9}{x+3}-\dfrac{x+8}{x+4}=\dfrac{2x+15}{x+5}-\dfrac{x+12}{x+6}$.

**221.** Найдите наибольший корень уравнения:

а) $\dfrac{x^2+2}{x+2}+\dfrac{x^2+3}{x}=5$;

б) $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\dfrac{x^2}{x+2}=6$;

в) $\dfrac{x^2-1}{x+4}+\dfrac{x^2+1}{x+2}=1-\dfrac{1}{x+2}$;

г) $\dfrac{x^2}{x+2}+\dfrac{x^2+1}{x+1}=2-\dfrac{2}{x+2}$.

**222.** Решите уравнение:

а) $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x+1}{x-2}=0$;

б) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{2x}{x+3}=1$;

в) $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}=0$;

г) $\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{3x}{x+2}=3$.

**223.** Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $\dfrac{1}{x^2+x+2}+\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{6}{x^2+x+6}$;

б) $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$.

**224.** Найдите корни уравнения:

а) $\left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = 4\frac{1}{4} - \left(\frac{x}{x+2}\right)^2$;

б) $\left(\frac{p+6}{2p}\right)^2 + \left(\frac{2p}{p+6}\right)^2 - 2 = 0$.

**225.** При каких значениях $b$ сумма дробей

а) $\frac{3b^2+1}{2b}$ и $\frac{8b}{3b^2+1}$ равна 4;  б) $\frac{2b^2+2}{b}$ и $\frac{5b}{b^2+1}$ равна 7?

**226.** Найдите корни уравнения:

а) $y^4 - \frac{31}{2y^4-1} = 15$;  б) $\frac{12}{y^2-2y+3} - y^2 + 2y = -1$.

**227.** Найдите корни уравнения, удовлетворяющие условию $x > -\frac{\sqrt{15}}{3}$:

а) $\frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x^4-x^2} = \frac{24}{x^6-x^2}$;  б) $\frac{3}{y^2+1} + \frac{2}{y^4-y^2} = \frac{12}{y^6-y^2}$.

**228.** Решите уравнение:

а) $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+8} = \frac{7}{8}$;  в) $\frac{1}{x(x+3)} - \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{60}$;

б) $\frac{1}{p^4+5} - \frac{1}{p^4+7} = \frac{1}{24}$;  г) $\frac{1}{x(x-2)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{12}$.

**229.** Найдите корни уравнения, удовлетворяющие условию $x < \frac{\sqrt{7}}{5}$:

а) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 8\frac{1}{9}\left(x + \frac{1}{x}\right)$;  в) $x^3 - \frac{1}{x^3} = 7\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

б) $x^3 - \frac{1}{x^3} = 5\frac{1}{9}\left(x - \frac{1}{x}\right)$;

**230.** Решите уравнение, выполнив предварительно преобразование его левой части:

а) $\frac{x^3-x}{(x^2+3x-1)} = \frac{2}{27}$;  б) $\frac{(x^2-2x+5)^2}{x^3+5x} = 2\frac{2}{3}$.

**231.** С помощью графиков выясните, сколько корней имеет уравнение $\frac{6}{x+2} = x^3$ и найдите приближенно значения его корней.

**232.** Решите графически уравнение:

а) $\frac{x+7}{x+1} = x^2 + 4$; б) $\frac{x+6}{x} = x^3$.

## Упражнения для повторения

**233.** Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}3x - 1{,}1 < 0{,}7, \\ 0{,}2x + 6 > 0{,}1x + 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}5 - 0{,}2x > 1{,}7, \\ 0{,}6 - x < 1{,}6 - 3x. \end{cases}$

**234.** Найдите целые решения двойного неравенства:

а) $-1 \leqslant \frac{12x-3}{7} \leqslant 0$; б) $-1{,}5 < \frac{1{,}3-5x}{4} < 1{,}5$.

**235.** Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку $A(1; -3)$. Найдите $a$, $b$ и $c$, если известно, что вершиной параболы является точка $B(0{,}5; -4)$.

**236.** Изобразите схематически график функции $y = \frac{x-4}{x+3}$. Какова область определения функции? Укажите промежутки возрастания и убывания функции, если они существуют.

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Какое уравнение называется целым уравнением с одной переменной? Что называется степенью целого уравнения с одной переменной? Какова степень уравнения $x^4(1 - x^2) = 5x^3 - x^6$?

**2.** Сформулируйте и докажите теорему о целом корне уравнения $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, в котором все коэффициенты — целые числа, причем свободный член не равен нулю.

**3.** Сформулируйте и докажите теорему о представлении многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0$, в виде произведения $(x - a)P_1(x)$, где $P_1(x)$ — многочлен $(n - 1)$-й степени.

**4.** На примере уравнений

$$2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0 \text{ и } x(x+1)(x+2)(x+3) = 5040$$

разъясните, как решают целое уравнение с помощью разложения на множители и введения новой переменной.

**5.** Какое уравнение называется дробно-рациональным? В чем состоит основной прием решения дробно-рациональных уравнений?

# § 5. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## 12. Решение целых неравенств с одной переменной

Неравенство с одной переменной, обе части которого являются рациональными выражениями, называется *рациональным неравенством*. Если в рациональном неравенстве левая и правая части — целые выражения, то такое неравенство называется *целым неравенством*.

Примерами целых неравенств могут служить неравенства

$$0{,}1x^4 > x^2 - \sqrt{5},$$

$$\frac{(x^2 - 8)(0{,}3 - x)}{6} < x^3 + \frac{1}{16}x.$$

Из определения целого неравенства и условий перехода к равносильному неравенству вытекает, что любое целое неравенство с переменной $x$ можно преобразовать в равносильное ему неравенство вида $P(x) > 0$ или $P(x) < 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида. По степени многочлена определяется степень неравенства.

Неравенство первой степени в общем виде записывается так: $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$, где $x$ — переменная, $a$ и $b$ — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Прием решения неравенств первой степени вам хорошо известен. При $a > 0$ неравенство $ax + b > 0$ заменяют равносильным неравенством $x > -\frac{b}{a}$, множеством решений которого является промежуток $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, а при $a < 0$ его заменяют равносильным неравенством $x < -\frac{b}{a}$, множеством решений которого является промежуток $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$. Аналогичным образом решают неравенство $ax + b < 0$.

Неравенство второй степени в общем виде записывается так: $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где $x$ — переменная, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Решение неравенства второй степени сводится к нахождению промежутков, в которых квадратичная функция принимает положительные или отрицательные значения.

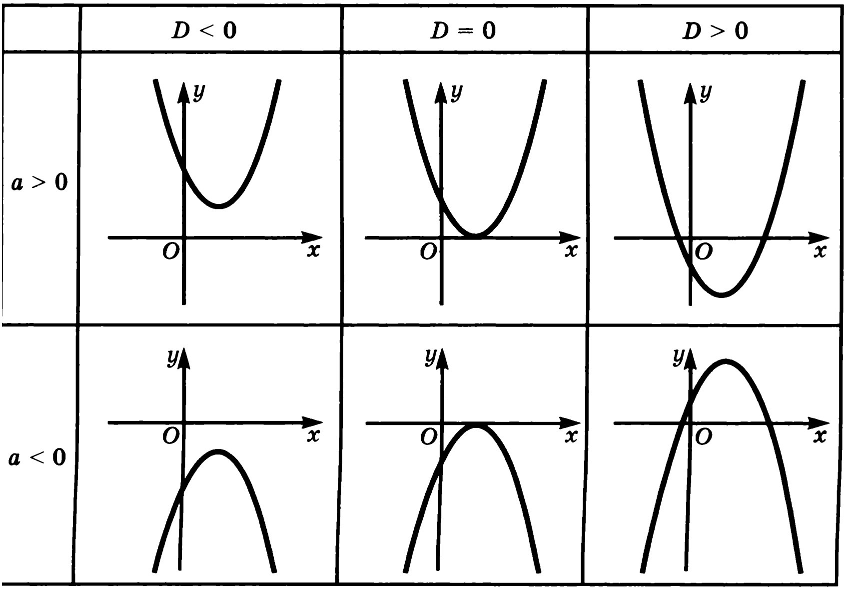



**Рис. 45**

На рисунке 45 показано схематически, как расположен относительно оси $x$ в координатной плоскости график функции $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от значения дискриминанта $D$, где $D = b^2 - 4ac$, квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Из рисунка видно, как связан знак квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ со знаком коэффициента $a$ при $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

Если $D < 0$, то знак квадратного трехчлена *совпадает* со знаком $a$ при любых значениях $x$.

Если $D = 0$, то знак квадратного трехчлена *совпадает* со знаком $a$ при любом значении $x$, кроме корня трехчлена.

Если $D > 0$, то знак квадратного трехчлена *противоположен* знаку $a$ в промежутке между корнями и *совпадает* со знаком $a$ вне этого промежутка.

Эти положения могут служить опорными при решении неравенств второй степени.

Пример 1. Решим неравенство $2x^2 - 5x + 2 < 0$.

Вычислив дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 - 5x + 2$, получим $D = 25 - 16 = 9 > 0$. Значит, трехчлен имеет два корня. Решив уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$, найдем, что $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Нам надо найти множество значений $x$, при которых трехчлен принимает отрицательные значения, т. е. его знак противоположен знаку первого коэффициента. Так как $D > 0$, то это выполняется в промежутке между корнями. Значит, неравенство верно, если $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Следует заметить, что для решения неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где $a \neq 0$, можно не запоминать вывод о соотношении между знаком квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и знаком коэффициента $a$, а использовать схематически изображенный график функции $y = ax^2 + bx + c$, который строится с учетом значений корней, если корни существуют, и знака коэффициента $a$.

Пример 2. Решим неравенство

$$2x^2 - 9x + 9 > 0.$$

График функции $y = 2x^2 - 9x + 9$ есть парабола, ветви которой направлены вверх. Для того чтобы определить, как эта парабола расположена относительно оси $x$, решим уравнение

$$2x^2 - 9x + 9 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 3$. Значит, парабола пересекает ось $x$ в двух точках, абсциссы которых 1,5 и 3. Изобразив параболу схематически (рис. 46), мы можем сделать вывод, что данное неравенство верно, если $x \in (-\infty; 1{,}5)$ или $x \in (3; +\infty)$, т. е. множеством решений неравенства является объединение этих промежутков.

Ответ: $(-\infty; 1{,}5) \cup (3; +\infty)$.

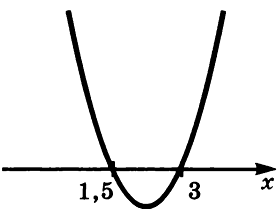


**Рис. 46**

Целое неравенство с одной переменной третьей или более высокой степени иногда удается решить, используя специальный метод, получивший название *метод интервалов*.

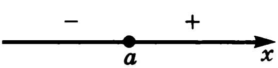


**Рис. 47**

Пусть дан двучлен $x - a$, где $a$ — некоторое число. Отметим на координатной прямой точку $a$ (рис. 47). Слева от точки $a$, т. е. при $x < a$, двучлен принимает отрицательные значения, а справа от точки $a$, т. е. при $x > a$, он принимает положительные значения. Значит, при переходе через точку $a$ двучлен $x - a$ меняет знак. Это свойство лежит в основе метода интервалов.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(x) = (x + 4)(x - 3)(x - 8).$$

Областью определения функции является множество действительных чисел. Отметим на координатной прямой нули функции, т. е. точки $-4$, 3, 8 (рис. 48). Исследуем знаки этой функции в каждом из образовавшихся промежутков $(-\infty; -4)$, $(-4; 3)$, $(3; 8)$, $(8; +\infty)$.

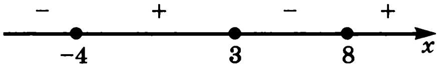



**Рис. 48**

Любая точка из промежутка $(-\infty; -4)$ лежит левее нулей функции. Отсюда вытекает, что в этом промежутке каждый из множителей $x + 4$, $x - 3$, $x - 8$ отрицателен и, значит, отрицательным числом является их произведение. В промежутке $(-4; 3)$ любая точка лежит правее точки $-4$, но левее точек 3 и 8, и поэтому при переходе из промежутка $(-\infty; -4)$ в промежуток $(-4; 3)$ множитель $x + 4$ меняет знак, а каждый из множителей $x - 3$ и $x - 8$ сохраняет знак. Следовательно, в промежутке $(-4; 3)$ произведение $(x + 4)(x - 3)(x - 8)$ является положительным числом. С помощью аналогичных рассуждений можно установить, что в промежутке $(3; 8)$ произведение $(x + 4)(x - 3)(x - 8)$ принимает отрицательное значение, а в промежутке $(8; +\infty)$ — положительное. Чередование знаков функции

$$f(x) = (x + 4)(x - 3)(x - 8)$$

показано на координатной прямой (см. рис. 48).

Вообще если функция задана формулой

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

где $x$ — переменная, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые числа, среди которых нет равных друг другу, то в каждом из промежутков, на которые нули функции разбивают область определения, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль ее знак изменяется.

Это свойство используется при решении неравенств вида

$$\begin{aligned} &(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) < 0, \\ &(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) > 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x$ — переменная, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — не равные друг другу числа.

Приведем примеры.

Пример 3. Решим неравенство

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 < 0.$$

Разложив левую часть неравенства на множители, получим

$$(x - 3)(x - 1)(x + 1) < 0.$$

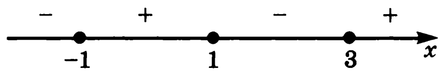



Рис. 49

Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 1),$$

т. е. числа 3, 1 и −1 (рис. 49).

Определим знаки функции в каждом из образовавшихся промежутков. При этом удобно начинать с промежутка, крайнего справа. Все точки этого промежутка расположены правее любого из нулей функции. Значит, в этом промежутке каждый из множителей $x - 3$, $x - 1$, $x + 1$ положителен, а потому положительным числом является их произведение. Знаки функции в остальных промежутках определим, используя свойство чередования знаков (см. рис. 49). Множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -1)$ и $(1; 3)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; 3)$.

Пример 4. Решим неравенство

$$x(7x + 2)(3 - x)(x^2 + 4) > 0.$$

Так как множитель $x^2 + 4$ при любом $x$ принимает положительное значение, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x(7x + 2)(3 - x) > 0.$$

Приведем это неравенство к виду (1). Для этого в двучлене $7x + 2$ вынесем множитель 7 за скобки, а двучлен $3 - x$ умножим на −1, изменив при этом знак неравенства. Получим

$$7x\left(x + \frac{2}{7}\right)(x - 3) < 0.$$

Отсюда

$$x\left(x + \frac{2}{7}\right)(x - 3) < 0.$$

Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x) = x\left(x + \frac{2}{7}\right)(x - 3)$$

и ее знаки в образовавшихся промежутках (рис. 50).

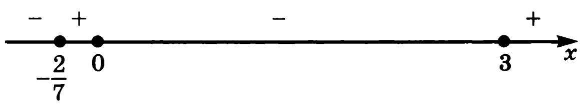



Рис. 50

Множеством решений неравенства $x\left(x+\frac{2}{7}\right)(x-3)<0$, а значит, и равносильного ему заданного неравенства, служит объединение промежутков $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right)$ и $(0; 3)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right) \cup (0; 3)$.

Заметим, что существенным является требование, чтобы в формуле $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ ...\ (x-x_n)$ среди чисел $x_1, x_2, \ ...\ , x_n$ не было бы равных друг другу. В противном случае в произведении может оказаться четное число множителей вида $x-x_k$ и при переходе через точку $x_k$ знак произведения не будет меняться. Это следует учитывать при решении целых неравенств методом интервалов.

Пример 5. Решим неравенство

$$x(x+3)(x-4)(x-2)^2<0.$$

Отметим на оси координат нули функции

$$f(x)=x(x+3)(x-4)(x-2)^2$$

и ее знаки в каждом из образовавшихся интервалов, учитывая при этом, что при переходе через точку 2 знак функции не меняется (рис. 51).

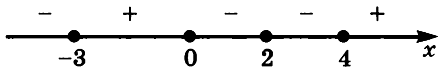



**Рис. 51**

Множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -3)$, $(0; 2)$ и $(2; 4)$. Заметим, что заменить объединение промежутков $(0; 2)$ и $(2; 4)$ промежутком $(0; 4)$ нельзя, так как при $x=2$ значение функции равно 0.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (0; 2) \cup (2; 4)$.

Общий вид графика функции $y=f(x)$ показан на рисунке 52. График пересекает ось $x$ в точках с абсциссами $-3$, 0, 4 и касается оси $x$ в точке с абсциссой 2.

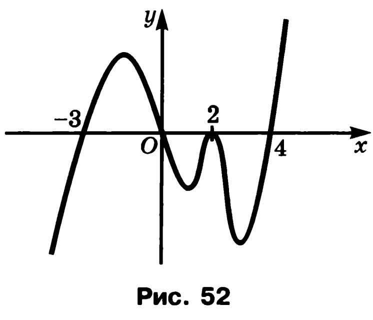



**Рис. 52**

**237.** Решите неравенство:

а) $x^2 - 11x + 24 < 0$;
б) $2x^2 + 11x - 6 > 0$;
в) $-7x^2 - 6x + 1 \geqslant 0$;
г) $2{,}5x^2 + x + 0{,}1 > 0$;
д) $-9x^2 + 12x - 4 > 0$;
е) $0{,}1x^2 + x - 2{,}4 \leqslant 0$;
ж) $3x^2 - x + 5 > 0$;
з) $-2x^2 - 4x - 6 \geqslant 0$.

**238.** Решите неравенство:

а) $6x^2 - x < 0$;
б) $7x^2 + 8 > 0$;
в) $8x^2 \geqslant 11x$;
г) $x^2 < 5x$;
д) $x^2 < 9$;
е) $x^2 > 16$.

**239.** Найдите множество решений неравенства:

а) $7x(7x - 4) + 2(7x + 2) \geqslant 0$;
б) $3p(p - 2) < 2p(p + 4) - (p - 16)$;
в) $2(6 - x) + 3x(x - 1) \leqslant 0$;
г) $(y - 3)^2 - 3(6 - y) < 1$.

**240.** При каких значениях $a$

а) каждое решение неравенства $2x^2 - x - 3 < 0$ является решением неравенства $3x - 2a > 0$;
б) каждое решение неравенства $x^2 - 2{,}5x - 6 < 0$ является решением неравенства $5a - 2x > 0$?

**241.** Решите неравенство:

а) $\frac{2x^2 - x}{6} > \frac{x + 2}{2}$;
б) $\frac{x^2 + 1}{4} - x - 1 > \frac{1}{2}$;
в) $\frac{y^2 + y}{11} > 4 - \frac{y}{33}$;
г) $\frac{x^2}{4} - 1 - \frac{x - 7}{8} < 0$.

**242.** Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $(5p - 1)(p + 2) - \frac{(p - 1)p}{3} < 7$;
б) $\frac{(3u + 2)(u - 1)}{2} - \frac{(2u - 1)(2u + 1)}{4} < 1$.

**243.** Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $\frac{(6x - 2)x}{2} - \frac{(3x - 1)(3x + 1)}{3} < 1$;
б) $\frac{(3y + 1)(y - 2)}{6} - \frac{(y - 1)^2}{3} < 0{,}5$.

**244.** При каких значениях $x$ имеет смысл выражение:

а) $\frac{\sqrt{2x^2 + 5x - 3}}{4}$;
б) $\frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{x}$;
в) $\frac{\sqrt{4x^2 - 4x - 3}}{x - 2}$;
г) $\frac{\sqrt{2x^2 - x + 8}}{x^2 - 16}$?

**245.** Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 48 < 0, \\ 3x - 6 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6p^2 + 11p - 2 < 0, \\ 10p^2 + 3p - 1 < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 9y^2 - 30y + 25 > 0, \\ 0{,}2y - 0{,}1 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x > 1{,}4x^2, \\ 9x^2 + 5x - 4 < 0. \end{cases}$

**246.** Найдите все целые числа, удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} t^2 - 3 < 0, \\ t^2 - 2t < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2p^2 - 13p + 6 < 0, \\ 3p^2 - 28p + 44 < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0, \\ x^2 - 4x + 4 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x^2 - 35x + 11 < 0, \\ 2x^2 - 4{,}5x < -1. \end{cases}$

**247.** Найдите множество значений $x$, удовлетворяющих совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 11x + 30 < 0, \\ 0{,}3x - 1 > 0{,}6; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 6x^2 - 11x + 4 < 0, \\ 4x^2 - 13x + 9 < 0. \end{array}\right.$

**248.** При каких значениях $x$ не имеет смысла выражение:

а) $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x^2 - 5x}$; б) $\sqrt{2x^2 - 6x} + \sqrt{x^2 - 6x + 8}$?

**249.** Найдите множество решений неравенства $x^2 - 3x \leqslant 1$, принадлежащих промежутку $[-1; 1]$.

**250.** Найдите множество значений $x$, удовлетворяющих системе:

а) $\begin{cases} x^2 - 8{,}5 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3x - 1 < 0, \\ x - 4 > 0; \end{array}\right. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 7{,}6x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3 + x < 0, \\ 2x - 9 > 0. \end{array}\right. \end{cases}$

**251.** При каких значениях $m$ верно при любом $x$ неравенство:

а) $x^2 + (2m - 3)x + m^2 - m + 4 > 0$;

б) $x^2 + (2m - 6)x + 2m^2 - m + 3 > 0$?

**252.** При каких значениях $b$ верно при любых $x$ неравенство:

а) $bx^2 - 8x + b < 0$; б) $bx^2 - 3x + b > 0$?

**253.** При каких значениях $p$ множеством решений неравенства

$$px^2 - 2(p - 1)x + 2p < 0$$

является пустое множество?

**254.** При каких значениях $k$ все точки графика функции
а) $y = x^2 - 4kx + k(k - 1)$ расположены выше оси $x$;
б) $y = -x^2 + 6kx + k(k + 1)$ расположены ниже оси $x$;
в) $y = kx^2 + 2(k + 1)x + 4k$ расположены ниже оси $x$?

**255.** Используя метод интервалов, решите неравенство:
а) $(x + 1{,}2)\left(x + 1\frac{1}{3}\right) \geqslant 0$;
б) $\left(x + \frac{1}{6}\right)\left(x + \frac{3}{7}\right)\left(x - \frac{1}{8}\right) < 0$;
в) $x(x - 4)(x - 4{,}2)\left(x - 4\frac{1}{3}\right) < 0$.

**256.** Решите неравенство:
а) $(5x - 2)(x + 6) > 0$;
б) $(x - 0{,}3)(6x - 1)(5 - 2x) > 0$;
в) $(2x - 7)(x + 6)(4 - x) \leqslant 0$;
г) $x^2(x + 3)(3 - 2x) > 0$;
д) $x(2x - 15)(x - 6)^2 < 0$;
е) $x(2x + 3)(x - 1{,}6)^2 > 0$.

**257.** Найдите координаты точек, в которых график функции
$$y = (x - 2)^2(2x + 3)(3x - 4{,}5)$$
а) пересекает ось $x$; б) касается оси $x$.

**258.** При каких значениях $a$
а) множеством решений неравенства $(x - a)^2(x - 4)(x + 6) < 0$ является числовой промежуток $(-6; 4)$;
б) множеством решений неравенства $(x + a)^2(x - 7)(x + 5) > 0$ является объединение числовых промежутков $(-\infty; -5)$ и $(7; +\infty)$?

**259.** Решите неравенство:
а) $(x^2 + x)(49 - x^2) < 0$;
б) $(x^4 - 1)(x^2 + 11) > 0$;
в) $(x^2 - 7)(x^2 + 18) < 0$;
г) $(x^2 - 11)(15 - x^2) \geqslant 0$;
д) $(x^3 - 3x^2)(x^2 + 7) \leqslant 0$;
е) $(x^2 - 6x + 5)(x + 8) > 0$;
ж) $(x^2 - x + 11)(4 - x) \geqslant 0$;
з) $(x^2 - 9)(x^2 + 2x + 14) > 0$.

**260.** Найдите множество решений неравенства:
а) $7x^3 - 2x^2 - 28x + 8 > 0$;
б) $x^3 + 6x^2 - x - 6 < 0$;
в) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 > 0$;
г) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < 0$.

**261.** Решите неравенство:

а) $(x-8)^2(x^2-3x+4) > (x-8)^2(x+1)$;

б) $(2x-3)^4(x^2-x) > (x-1)(2x-3)^4$;

в) $(x^2-4x+4)(x^2-1) < (x-2)^2(x+5)$;

г) $(x+6)^2(x^2+x-1) < (x^2+3x)(x+6)^2$.

**262.** При каких значениях $x$ имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{(x+4)(3-x)}}{x^2-25}$;  б) $\dfrac{\sqrt{(x^2-6x)(x^2+2)}}{x^2+x}$?

**263.** Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{(2-x)(x+19)}$;  в) $y=\sqrt{x^3-2x^2+6x-12}$;

б) $y=\sqrt{(x^2-x)(x^2+7)}$;  г) $y=\sqrt{x^3-5x^2+7x-3}$.

## Упражнения для повторения

**264.** Какие из данных функций сохраняют знак на всей области определения:

$$y=2x^2+1;\ y=\sqrt{x+3};\ y=\sqrt{x}+6;\ y=-\sqrt{x};$$

$$y=6x+4;\ y=-15x^2;\ y=-x^2-4;\ y=\frac{5}{x^2+6}?$$

**265.** Изобразите схематически график функции $y=\sqrt{x}-3$ и укажите для нее промежутки знакопостоянства.

**266.** При каких значениях $x$ равны значения двучленов:

а) $5x^4+9$ и $x^4+37x^2$;  б) $x^4-10x^2$ и $12x^2+75$?

**267.** Найдите сумму и произведение корней биквадратного уравнения:

а) $x^4-14x^2+45=0$;  б) $x^4-2x^2-63=0$.

**268.** Решите уравнение:

а) $\dfrac{5-2x}{3-x}=\dfrac{1}{x-3}-1$;  б) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2x-2}{3x-3}+\dfrac{2}{3}=0$.

## 13. Решение дробно-рациональных неравенств с одной переменной

Неравенство с одной переменной, обе части которого рациональные выражения, называется, как известно, рациональным неравенством. Если в рациональном неравенстве обе части или хотя бы одна из них являются дробными выражениями, то такое неравенство называется *дробно-рациональным неравенством.*

Примерами дробно-рациональных неравенств могут служить неравенства:

$$\frac{5}{x+1} + \frac{2}{x} > \frac{1}{x+1}; \quad \frac{1}{x} < 2 - \frac{3{,}7}{x^2};$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x} < 2x^4 + 1.$$

Если в дробно-рациональном неравенстве перенести все члены в левую часть и представить полученное дробно-рациональное выражение в виде отношения двух многочленов, то получится неравенство вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Так как неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ равносильно неравенству $P(x)Q(x) > 0$, то для его решения можно использовать метод интервалов. Аналогично для решения неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, равносильного неравенству $P(x)Q(x) < 0$, также можно воспользоваться методом интервалов.

Приведем примеры.

Пример 1. Решим неравенство $\frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 15}{x^2 + 4x - 12} > 0.$

Разложив на множители числитель и знаменатель дроби, представим данное неравенство в виде

$$\frac{(x-5)(x^2+3)}{(x+6)(x-2)} > 0.$$

Так как $x^2 + 3 > 0$ при любом $x$, то это неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x-5}{(x+6)(x-2)} > 0.$$

Отметим на координатной прямой значения $x$, обращающие в нуль числитель или знаменатель дроби, и знаки дроби в каждом из образовавшихся промежутков (рис. 53). Множеством решений исходного неравенства является объединение промежутков $(-6; 2)$ и $(5; +\infty)$.

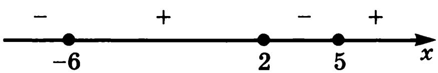



**Рис. 53**

Ответ: $(-6; 2) \cup (5; +\infty)$.

Пример 2. Решим неравенство $\frac{x^3 - 3x + 2}{(x-1)^2(x^2-9)} < 0.$

Разложив на множители числитель и знаменатель дроби, представим данное неравенство в виде

$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x-3)(x+3)} < 0.$$

Отметим на координатной прямой значения $x$, обращающие в нуль числитель или знаменатель дроби. Определим знак дроби в каждом из образовавшихся промежутков, учитывая при этом, что при переходе через точку 1 знак дроби не меняется (рис. 54).

Множеством решений полученного неравенства, а значит, и равносильного ему исходного неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -3)$, $(-2; 1)$ и $(1; 3)$.

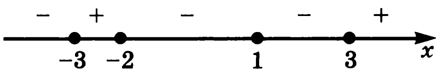



**Рис. 54**

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (1; 3)$.

Заметим, что если бы мы сократили дробь $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x-3)(x+3)}$ на $(x-1)^2$, то получили бы неравенство $\frac{x+2}{(x-3)(x+3)} < 0$, которое не равносильно исходному. Действительно, число 1 удовлетворяет полученному неравенству, но не является решением исходного неравенства. Вообще при решении неравенства вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ нельзя допускать сокращения дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, так как это может привести к нарушению равносильности.

Остановимся теперь на решении нестрогих неравенств вида $\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$ и $\frac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0$.

Множеством решений неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$ является объединение множеств решений неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ и уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. Множеством решений неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0$ является объединение множеств решений неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ и уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

Пример 3. Решим неравенство $\frac{(x-2)^2(x+3)}{(x+5)(x-7)} \geqslant 0$.

Отметим на координатной прямой значения $x$, обращающие в нуль числитель или знаменатель дроби, и определим знак дроби в каждом из образовавшихся интервалов (рис. 55). Неравенству удовлетворяют все значения $x$, при которых эта дробь принимает положительные значения, а также числа 2 и −3, обращающие в нуль ее числитель. Значит, множество решений неравенства состоит из промежутков (−5; −3], (7; +∞) и числа 2.

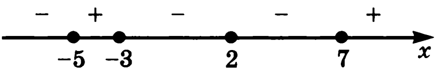



**Рис. 55**

Ответ: $(-5; -3] \cup \{2\} \cup (7; +\infty)$.

Пример 4. Найдем, при каких значениях $x$ значения дроби $\frac{5x-1}{2x-3}$ принадлежат числовому промежутку [3; 5].

Требуется решить двойное неравенство

$$3 \leqslant \frac{5x-1}{2x-3} \leqslant 5.$$

Запишем это двойное неравенство в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{5x-1}{2x-3} \geqslant 3, \\ \frac{5x-1}{2x-3} \leqslant 5. \end{cases}$$

Используя метод интервалов, найдем, что множеством решений первого неравенства является промежуток (1,5; 8], а второго — объединение промежутков (−∞; 1,5) и [2,8; +∞). Множеством решений системы, а значит, и рассматриваемого двойного неравенства, служит пересечение этих множеств, т. е. промежуток [2,8; 8] (рис. 56).


**Рис. 56**

Ответ: при $x \in [2,8; 8]$.

**269.** Решите неравенство:

а) $\frac{x+5}{2x+6} > 0$;

б) $\frac{(6-x)(2x-9)}{x+5} > 0$;

в) $\frac{(3-2x)(5+3x)}{3x-6} < 0$;

г) $\frac{(7x+1)(11x+2)}{13x-4} > 0$.

**270.** Найдите множество решений неравенства:

а) $\frac{3-4x}{2-x} \geqslant 0$;

б) $\frac{(6-8x)^2}{2x+7} \leqslant 0$;

в) $\frac{5x-0{,}2}{2x+0{,}3} \geqslant 0$;

г) $\frac{(x-4)(2x+7)}{x+8} \geqslant 0$;

д) $\frac{(1-x)(3x+2)}{2x+3} \leqslant 0$;

е) $\frac{(6x-1)(3x-2)}{x+4} \leqslant 0$.

**271.** Решите неравенство:

а) $\frac{x^3-2x^2-9x+18}{x-4} > 0$;

б) $\frac{x^3-x^2+6x-6}{x^2-16} < 0$;

в) $\frac{x^4-10x^2+9}{2x-6} > 0$;

г) $\frac{x^4-3x^2-4}{x} < 0$;

д) $\frac{x^3-2x+1}{x+8} \geqslant 0$;

е) $\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x-3} \leqslant 0$.

**272.** При каких значениях $x$ имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{\frac{x^2+x-6}{x-8}}$;

б) $\sqrt{\frac{x^3-4x^2+x-4}{x+1}}$?

**273.** При каких значениях $x$ не имеет смысла выражение:

а) $\sqrt{\frac{3x-4}{x}} + \sqrt{2-x}$;

б) $\sqrt{\frac{2-4x}{x+1}} - \sqrt{6-x}$?

**274.** При каких значениях $a$ верно при любых $x$ неравенство:

а) $\frac{ax}{x^2+1} < 5$;

б) $\frac{ax-3}{x^2+2} < 1{,}5$?

**275.** Найдите множество решений неравенства:

а) $\frac{6}{x-2} - \frac{1}{x} < 0$;

б) $\frac{3}{x+6} - \frac{2}{x+1} \geqslant 0$;

в) $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} < 1$;

г) $\frac{3}{x+2} - \frac{3}{x-2} > 2$.

**276.** Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x-4} > \dfrac{x+3}{x-1}, \\ 3x - 7 > x + 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x+2} \leqslant \dfrac{2x+1}{x}, \\ 3(2 - x) \geqslant 7x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{6x-1}{x+4} \leqslant 2, \\ 5(x - 8) > 6x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{3x} \geqslant \dfrac{2x}{x+4}, \\ 13 - 12x > x. \end{cases}$

**277.** Решите двойное неравенство:

а) $2 < \dfrac{3x-8}{x+1} < 3$; в) $-1 < \dfrac{x-8}{x+1} < 3$;

б) $0 < \dfrac{x}{x+4} < 2$; г) $1 \leqslant \dfrac{4+x}{3x+2} \leqslant 2$.

**278.** Найдите все целые значения $x$, удовлетворяющие двойному неравенству:

а) $1 < \dfrac{x+2}{5-x} < 6$; б) $-1 < \dfrac{3x+1}{5-2x} < 1$.

**279.** При каких значениях $a$ значения дроби $\dfrac{2a-1}{a+3}$

а) принадлежат промежутку [1; 2];
б) находятся вне промежутка [4; 7]?

**280.** При каких значениях $x$ точки графика функции $y = \dfrac{6-2x}{x+1}$ расположены:

а) выше прямой $y = 2$;
б) внутри полосы, ограниченной прямыми $y = 1$ и $y = 5$?

## Упражнения для повторения

**281.** Решите уравнение:

а) $x^3 - 36x = 0$;
б) $4x^4 = 25x^2 - 6$;
в) $x^4 + 10x^2 + 24 = 0$;
г) $5x^3 - 16 = 40x^2 - 2x$.

**282.** Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = \sqrt{2}x^2 - 10x + 8\sqrt{2}$ с осями координат.

**283.** При каких значениях $a$ множеством решений неравенства $(x+a)^2(x-6)(5x-2)<0$ является числовой промежуток $(0{,}4;\ 6)$?

**284.** Постройте график функции:

а) $y=|2x-7|$;  в) $y=|4x-6|-3$;

б) $y=|5x+11|$;  г) $y=-|x+4|+5$.

**285.** При каких значениях $a$ неравенство

$$(a-2)x^2-4x+a+2<0$$

верно при любом $x$?

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Как связан знак квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$ со знаком коэффициента $a$ при $D<0$; $D=0$; $D>0$?

**2.** На примере неравенств $x^2-7x+6>0$, $x^2-4x+4>0$ и $x^2-2x+8>0$ объясните, как можно решить неравенство второй степени с одной переменной.

**3.** Сформулируйте свойство функции, на котором основан метод интервалов. На примере неравенств $(x+8)(x-6)(x-11)<0$ и $(x+11)^2(x-3)^2(x+4)(x-6)>0$ объясните, как решают неравенство методом интервалов.

**4.** Равносильны ли неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ и $P(x)\cdot Q(x)>0$; $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$ и $P(x)\cdot Q(x)<0$? На примере неравенств $\frac{3-6x}{x+2}>0$ и $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}<1$ объясните, как решают строгие дробно-рациональные неравенства.

**5.** Равносильны ли неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)}\geqslant 0$ и $P(x)\cdot Q(x)\geqslant 0$; $\frac{P(x)}{Q(x)}\leqslant 0$ и $P(x)\cdot Q(x)\leqslant 0$? На примере неравенств $\frac{12-5x}{7x+14}\leqslant 0$ и $\frac{5x+6}{x}\geqslant x$ объясните, как решают нестрогие дробно-рациональные неравенства.

# § 6. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

## 14. Решение уравнений с переменной под знаком модуля

Рассмотрим приемы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля.

Простейшие уравнения вида $|x - a| = b$, где $a$ и $b$ — некоторые числа, нетрудно решать, используя геометрические представления. Как известно, расстояние между точками координатной прямой равно модулю разности координат этих точек. Поэтому задачу «решить уравнение $|x - a| = b$, где $b > 0$» можно сформулировать иначе: «найти координаты точек, находящихся на координатной прямой на расстоянии $b$ единиц от точки с координатой $a$».

Пример 1. Решим уравнение $|x - 2| = 3$.

На координатной прямой на расстоянии, равном трем единицам от точки 2, находятся точки с координатами $-1$ и 5 ($2 - 3 = -1$, $2 + 3 = 5$). Значит, уравнение $|x - 2| = 3$ имеет два корня: $-1$ и 5.

Основной прием решения уравнений с переменной под знаком модуля состоит в том, чтобы, используя определение и свойства модуля числа, освободиться от знака модуля, заменяя данное уравнение равносильным ему уравнением, системой или совокупностью уравнений.

Начнем с наиболее простого случая, когда уравнение имеет вид $|f(x)| = b$, где $b$ — некоторое число.

Если $b < 0$, то уравнение $|f(x)| = b$ не имеет корней.

Если $b = 0$, то уравнение $|f(x)| = b$ равносильно уравнению $f(x) = 0$.

Если $b > 0$, то уравнение $|f(x)| = b$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = b, \\ f(x) = -b, \end{array}\right.$ и множеством его корней является объединение множеств корней уравнений, входящих в эту совокупность.

Пример 2. Решим уравнение $|x^2 - 2x - 4| = 4$.

Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 4 = -4, \\ x^2 - 2x - 4 = 4. \end{array}\right.$$

Решая первое уравнение, найдем, что оно имеет корни 0 и 2. Решая второе уравнение, найдем, что оно имеет корни −2 и 4. Объединение множеств корней этих двух уравнений, т. е. множество, состоящее из чисел 0, 2, −2 и 4, является множеством корней заданного уравнения.

Ответ: 0; 2; −2; 4.

Остановимся теперь на решении уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|$. Модули двух чисел равны, если эти числа либо равны, либо являются противоположными. Поэтому уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Пример 3. Решим уравнение $|x^2 + 2x - 1| = |x + 1|$.

Это уравнение равносильно совокупности

$$x^2 + 2x - 1 = x + 1 \text{ или } x^2 + 2x - 1 = -(x + 1).$$

Решая каждое из этих уравнений, найдем, что первое из них имеет корни 1 и −2, а второе имеет корни 0 и −3. Объединение множеств корней этих уравнений, состоящее из чисел 1, −2, 0 и −3, является множеством корней заданного уравнения.

Ответ: 1; −2; 0; −3.

Более сложным является случай, когда уравнение имеет вид $|f(x)| = g(x)$. Из определения модуля следует, что корни уравнения должны удовлетворять условию $g(x) \geqslant 0$. При соблюдении этого условия искомые корни уравнения должны также удовлетворять совокупности $f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$. Значит, уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Заметим, что при этом совокупность двух систем можно заменить системой $\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$

Пример 4. Решим уравнение $|x^2 - 4x + 3| = 2x - 5$.

Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 2x - 5, \\ 2x - 5 \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = -(2x - 5), \\ 2x - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = 2x - 5$, найдем, что оно имеет корни 2 и 4. Из них условию $2x - 5 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 2{,}5$, удовлетворяет только число 4. Значит, первая система имеет единственное решение: $x = 4$. Решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = -(2x - 5)$, найдем, что его корнями служат числа $1 - \sqrt{3}$ и $1 + \sqrt{3}$. Из них условию $2x - 5 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 2{,}5$, удовлетворяет только число $1 + \sqrt{3}$. Значит, вторая система имеет единственное решение: $x = 1 + \sqrt{3}$. Множеством корней исходного уравнения служит объединение множеств решений систем, т. е. множество, состоящее из чисел 4 и $1 + \sqrt{3}$.

Ответ: 4; $1 + \sqrt{3}$.

Один из распространенных приемов, которым часто пользуются при решении уравнений с переменной под знаком модуля, состоит в том, что освобождаются от знака модуля, выделяя промежутки, в которых выражение, записанное под знаком модуля, сохраняет знак.

Пример 5. Решим уравнение $x^2 - 4|x - 3| - 2x - 7 = 0$.

Это уравнение можно свести к виду $|f(x)| = g(x)$. Удобнее, однако, воспользоваться тем, что двучлен сохраняет знак на каждом из промежутков, на которые его корень, т. е. число 3, разбивает координатную прямую. Освобождаясь от знака модуля, получаем, что данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - 4(x - 3) - 2x - 7 = 0, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 4(3 - x) - 2x - 7 = 0, \\ x < 3. \end{cases}$$

Решая уравнение $x^2 - 4(x - 3) - 2x - 7 = 0$, найдем, что оно имеет корни 1 и 5. Учитывая условие $x \geqslant 3$, находим, что решением первой системы является число 5. Решая уравнение $x^2 - 4(3 - x) - 2x - 7 = 0$, найдем, что оно имеет корни $-1 - \sqrt{20}$ и $-1 + \sqrt{20}$. Из них условию $x < 3$ удовлетворяет только корень $-1 - \sqrt{20}$. Значит, решением второй системы является число $-1 - \sqrt{20}$. Следовательно, исходному уравнению удовлетворяют два числа: 5 и $-1 - \sqrt{20}$.

Ответ: 5; $-1 - \sqrt{20}$.

Пример 6. Решим уравнение $|x + 1| + |x - 4| = 5$.

Корни двучленов $x + 1$ и $x - 4$ разбивают координатную прямую на три промежутка: $(-\infty; -1)$, $[-1; 4]$, $(4; +\infty)$. Освобождаясь

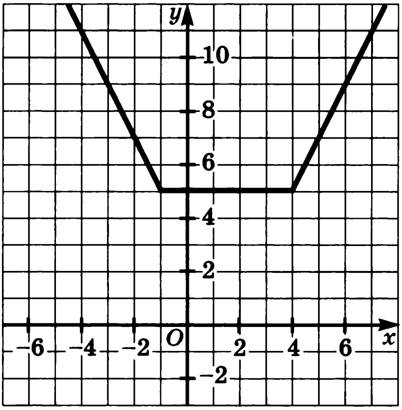



**Рис. 57**

от знаков модуля на каждом из этих промежутков, получим, что данное уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\begin{cases} -x - 1 - x + 4 = 5, \\ x < -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + 1 - x + 4 = 5, \\ -1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} x + 1 + x - 4 = 5, \\ x > 4. \end{cases}$$

Решим каждую из этих систем. Находим, что первая и третья системы не имеют решений, а множеством решений второй является промежуток $[-1; 4]$. Значит, множеством корней исходного уравнения является промежуток $[-1; 4]$.

Ответ: $[-1; 4]$.

Убедиться в правильности этого ответа можно, обратившись к графику функции $y = |x + 1| + |x - 4|$ (рис. 57).

**286.** Отметьте на координатной прямой точку $A(-4)$ и точки, удаленные от нее на расстояние, равное

а) 2 единицам; б) 4 единицам; в) 7 единицам.

**287.** Решите уравнение:

а) $|x - 5| = 3$; б) $|x + 8| = 1$; в) $|6 - x| = 4$.

**288.** Найдите множество решений уравнения:

а) $|3x - 1| = 5$; б) $|2 - 8x| = 0$; в) $|16x - 32| = -1$.

**289.** Решите уравнения:

а) $|x^2 - 1| = 0$; в) $|x^2 - 5x + 1| = 5$;

б) $|8 - x^2| = 1$; г) $|x^2 - x + 1| = 1$.

**290.** Сколько корней имеет уравнение $|x - 12| = a^2 - 5a + 6$ в зависимости от значений $a$?

**291.** Найдите корни уравнения:

а) $\big||2x - 1| - 1\big| = 0$; в) $\big||x + 6| - 6\big| = 6$;

б) $\big||x + 1| + 3\big| = 5$; г) $\big|7 - |3x - 1|\big| = 2$.

**292.** Решите уравнение:

а) $|2x^2 - 3x + 1| = |x^2 + x - 2|$;

б) $|11x^2 - 10x + 2| = |x^2 + x|$.

**293.** Найдите корни уравнения:

а) $|x^2 + 3x - 4| = 3x$; г) $|2x^2 + 5x - 10| = 5 - 2x$;

б) $|x^2 - 4x + 4| = x$; д) $|x^2 - x + 3| = x + 2$;

в) $6x = |x^2 + 8x - 8|$; е) $x - 1 = |6x^2 + 2x - 2|$.

**294.** Решите графически уравнение:

а) $x^3 = |x|$; б) $\frac{6}{x} = |x|$; в) $x^3 = |x - 2|$.

**295.** Решите уравнение:

а) $x^2 - 4|x + 1| - 41 = 0$; б) $3x^2 - 5|x - 2| - 12 = 0$.

**296.** Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x^2 - 4)|x| + 3 = 0$; в) $\frac{3}{|x| - 2} - \frac{9}{|x| + 3} = \frac{x^2}{x^2 + |x| - 6}$;

б) $(p^2 - 7)|p| = -6$; г) $\frac{x^2 - 4|x| - 2}{|x| - 2x^2} = 1$.

**297.** Решите уравнение:

а) $x^2 + 2x + |x + 1| = 0$;

б) $x^2 - 2x + 2 \cdot |x - 1| + 1 = 0$;

в) $4x(x - 1) + |2x - 1| = 1$.

**298.** Решите уравнение $|x - 2| + |x - 3| = 1$ и проиллюстрируйте ответ с помощью графика функции $y = |x - 2| + |x - 3|$.

**299.** Решите уравнение:

а) $|y - 4| + |y - 6| = 8$; в) $|x| + |x - 1| + |x - 2| = 3$;

б) $|y + 3| - |y - 2| = 5$; г) $|x| + |x - 4| + |x - 5| = 12$.

**300.** Найдите корни уравнения:

а) $\frac{3}{|x-2|} = x - 4$;

б) $\frac{10}{|2x-3|} = x - 1$;

в) $\frac{5}{|2x+1|} = x - 1$;

г) $\frac{x^2+4x}{|x+2|} = \frac{2x}{3}$.

**301.** Решите уравнение:

а) $\frac{3x-2}{x} - \frac{3x+4}{x^2-2x} = \frac{1}{|x-2|}$;

б) $\frac{4}{|3-x|} - \frac{4}{x+3} - 1 = 0$.

**302.** Решите уравнение:

а) $x^3 + |x-4| + 2 = 0$;

б) $\frac{x^3-8}{|x-2|} - x|x-2| = 0$.

### Упражнения для повторения

**303.** Решите неравенство:

а) $6x^2 \geqslant x + 7$; б) $25x^2 + 4 \leqslant 20x$; в) $17x^2 + 1 < x$.

**304.** Решите уравнение:

а) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$; б) $x^3 - x^2 = 3x^3 - 2x^2 - 1$.

**305.** Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ с осями координат.

## 15. Решение неравенств с переменной под знаком модуля

Рассмотрим приемы решения неравенств с переменной под знаком модуля.

Простейшие неравенства вида $|x - a| < b$ или $|x - a| > b$, где $a$ и $b$ — некоторые числа, причем $b > 0$, можно решать, используя геометрические представления.

Пример 1. Решим неравенство $|x + 1| < 5$.

Запишем данное неравенство в виде $|x - (-1)| < 5$. На 5 единиц от точки с координатой $-1$ удалены на координатной прямой точки с координатами $-6$ и $4$ ($-1 - 5 = -6$, $-1 + 5 = 4$), а менее чем на 5 единиц — точки, заключенные между ними. Значит, искомое множество есть промежуток $(-6; 4)$.

Ответ: $(-6; 4)$.

Основной прием решения неравенств с переменной под знаком модуля состоит в том, чтобы, используя определение и свойства модуля числа, освободиться от знака модуля, заменяя данное неравенство равносильным ему неравенством, системой или совокупностью неравенств.

Начнем с неравенств вида $|f(x)| < b$ или $|f(x)| > b$, где $b$ — некоторое число.

Если $b \leqslant 0$, то неравенство $|f(x)| > b$ не имеет решений, а неравенство $|f(x)| > b$ верно при любом значении $x$, т. е. множеством его решений является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Если $b > 0$, то неравенство $|f(x)| < b$ равносильно двойному неравенству $-b < f(x) < b$, а неравенство $|f(x)| > b$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) < -b, \\ f(x) > b. \end{array}\right.$$

Это обусловлено тем, что при $b > 0$ модуль, меньший, чем $b$, имеют числа, принадлежащие промежутку $(-b; b)$, а модуль, больший, чем $b$, имеют числа, находящиеся вне этого промежутка.

Пример 2. Решим неравенство $|x^2 - 5x| > 6$.

Данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x < -6, \\ x^2 - 5x > 6. \end{array}\right.$$

Решая первое неравенство, найдем, что множеством его решений является промежуток $(2; 3)$. Решая второе неравенство, найдем, что множеством его решений является объединение промежутков $(-\infty; -1)$ и $(6; +\infty)$. Значит, множеством решений исходного неравенства является объединение множеств $(2; 3)$, $(-\infty; -1)$ и $(6; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$.

Рассмотрим теперь неравенства вида $|f(x)| < g(x)$ и $|f(x)| > g(x)$.

Неравенство

$$|f(x)| < g(x) \qquad (1)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases} \qquad (2)$$

Докажем это. Пусть $x_0$ — решение неравенства (1). Тогда верным является неравенство $|f(x_0)| < g(x_0)$ причем $g(x_0) > 0$. Отсюда следует, что верно двойное неравенство

$$-g(x_0) < f(x_0) < g(x_0),$$

а это означает, что $x_0$ — решение системы (2). Значит, каждое решение неравенства (1) является решением системы (2). С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что каждое решение системы (2) является решением неравенства (1). Если неравенство (1) не имеет решений, то и система (2) не имеет решений, и наоборот. Таким образом, неравенство (1) и система (2) являются равносильными.

Неравенство

$$|f(x)| > g(x) \tag{3}$$

равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x), \\ f(x) > g(x). \end{array}\right. \tag{4}$$

Докажем это. Пусть $x_1$ — решение неравенства (3). Тогда верным является неравенство $|f(x_1)| > g(x_1)$. Отсюда, по определению модуля, $f(x_1) > g(x_1)$ или $-f(x_1) > g(x_1)$, т. е. $f(x_1) < -g(x_1)$. Значит, $x_1$ — решение совокупности (4), т. е. каждое решение неравенства (3) является решением совокупности (4). Допустим теперь, что число $x_2$ — решение совокупности (4). Тогда $f(x_2) > g(x_2)$ или $f(x_2) < -g(x_2)$. Если $g(x_2) > 0$, то из этого условия следует, что $|f(x_2)| > g(x_2)$, т. е. верно неравенство (3). Если $g(x_2) \leqslant 0$, то справедливость неравенства (3) очевидна. Таким образом, каждое решение неравенства (3) является решением совокупности (4) и каждое решение совокупности (4) является решением неравенства (3). Если неравенство (3) не имеет решений, то и совокупность (4) не имеет решений, и наоборот. Следовательно, неравенство (3) и совокупность (4) равносильны.

Пример 3. Решим неравенство $|x^2 - 5x - 6| < x + 10$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < x + 10, \\ x^2 - 5x - 6 > -x - 10. \end{cases}$$

Решая неравенства, входящие в эту систему, найдем, что множеством решений первого является промежуток $(-2; 8)$, а второго — множество всех чисел, кроме 2. Пересечением этих множеств является множество, состоящее из всех чисел, принадлежащих промежутку $(-2; 8)$, кроме числа 2.

Ответ: $(-2; 2) \cup (2; 8)$.

Пример 4. Решим неравенство $|x^2 - 7x + 6| > x^2 + x - 2$.

Данное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 7x + 6 > x^2 + x - 2, \\ x^2 - 7x + 6 < -(x^2 + x - 2). \end{array}\right.$$

Решим неравенства, входящие в эту совокупность. Множеством решений первого неравенства является промежуток $(-\infty; 1)$, а второго — промежуток $(1; 2)$. Множеством решений совокупности служит объединение этих множеств.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$.

Остановимся теперь на решении неравенств вида $|f(x)| < |g(x)|$ или $|f(x)| > |g(x)|$.

Если $a$ и $b$ — некоторые числа, то неравенство $|a| < |b|$ верно тогда и только тогда, когда $a^2 < b^2$. Поэтому неравенство $|f(x)| < |g(x)|$ равносильно неравенству $f^2(x) < g^2(x)$, а неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно неравенству $f^2(x) > g^2(x)$.

Пример 5. Решим неравенство $|x^2 - x| < |x - 10|$.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$(x^2 - x)^2 < (x - 10)^2.$$

Решая это неравенство, получим

$$(x^2 - x)^2 - (x - 10)^2 < 0,$$
$$(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 10) < 0.$$

Так как трехчлен $x^2 - 2x + 10$ при любом $x$ принимает положительные значения, то полученное неравенство равносильно неравенству

$$x^2 - 10 < 0.$$

Множеством решений этого неравенства, а значит, и равносильного ему исходного неравенства является промежуток $\left(-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right)$.

Ответ: $\left(-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right)$.

Иногда при решении неравенств удается освободиться от знака модуля, выделяя промежутки, на которых выражение, записанное под знаком модуля, сохраняет знак.

Пример 6. Решим неравенство $|x + 1| + |x + 4| < 5$.

Корни двучленов $x + 1$ и $x + 4$ разбивают координатную прямую на три промежутка: $(-\infty; -4)$, $[-4; -1]$, $(-1; +\infty)$. Данное неравенство равносильно совокупности трех систем:

$$\begin{cases} -x - 1 - x - 4 < 5, \\ x < -4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -x - 1 + x + 4 < 5, \\ -4 \leqslant x \leqslant -1 \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} x + 1 + x + 4 < 5, \\ x > -1. \end{cases}$$

Множеством решений первой системы служит промежуток $(-5; -4)$. Во второй системе первое неравенство верно при любом $x$, и поэтому множеством ее решений является промежуток $[-4; -1]$. Множество решений третьей системы — промежуток $(-1; 0)$. Множеством решений заданного неравенства служит объединение множеств $(-5; -4)$, $[-4; -1]$ и $(-1; 0)$, которое представляет собой промежуток $(-5; 0)$.

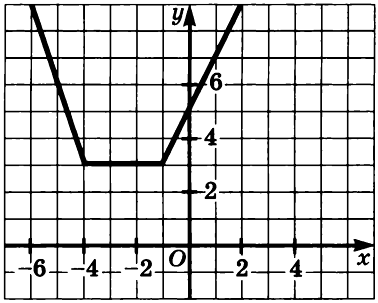


**Рис. 58**

Ответ: $(-5; 0)$.

Построив график функции $y = |x + 1| + |x + 4|$ (рис. 58), можно убедиться в правильности полученного ответа.

**306.** Найдите, при каких значениях $x$ расстояние между точками $A(x)$ и $B(8)$
а) меньше 4; б) больше 3.

**307.** Решите неравенство:
а) $|x - 7| < 4$; б) $|x + 5| > 6{,}8$; в) $|1 - x| < 23$; г) $|3 - x| > 14$.

**308.** Найдите множество значений $a$, при которых при любых значениях $x$ верно неравенство:
а) $|8 - x| > 2a - 1$; б) $|7{,}2 + x| > 1{,}5 - 3a$.

**309.** Решите неравенство:
а) $|3x - 2| \geqslant 3{,}4$; в) $|22 - 3x| < 8$;
б) $|12x - 1| > 17$; г) $|16 - 7x| \leqslant 2$.

**310.** Решите неравенство:
а) $|x^2 + 1| > 2$; в) $|x^2 - 2x| < 6$;
б) $|x^2 - 2x| < 3$; г) $|x^2 + x - 1| > 1$.

**311.** Решите аналитически и графически неравенство:
а) $|x^2 - 1| < 3$; б) $|x^2 - 4| > 5$.

**312.** Найдите целые решения неравенства:
а) $|x^2 - 3| < 6$; в) $|x^2 + 4x| < 5$;
б) $|x^2 - 8| < 7$; г) $|x^2 - x| < 6$.

**313.** Решите неравенство:
а) $|x^2 + 4x - 5| < x^2 - 5$; в) $|x^2 - 5x + 4| < 3x + 4$;
б) $|x^2 - 3x + 4| < x + 1$; г) $|2x^2 + x - 1| < 4x + 1$.

**314.** Решите неравенство $|x^2 - 2x| < x + 4$ и проиллюстрируйте ответ с помощью графиков функций $y = |x^2 - 2x|$ и $y = x + 4$.

**315.** Найдите множество решений неравенства:

а) $|x^2 + 3x - 4| < |3x|$;
б) $|x^2 - 2x + 1| < |x - 3|$;
в) $|x^2 - 3x + 2| < |3x - 2|$;
г) $|x^2 - x| > |x - 1|$.

**316.** Решите неравенство:

а) $|x + 1| + |x - 2| < 5$;
б) $|x - 3| + |x - 4| < 11$;
в) $|x + 3| - |x - 4| \leqslant 1$;
г) $|x + 6| + |x - 5| \geqslant 3$.

**317.** Решите неравенство:

а) $x^2 + |x| - 6 < 0$;
б) $x^2 - 2|x| - 8 > 0$;
в) $x^2 + 3|x| < 18$;
г) $2|x| + 15 - x^2 > 0$.

**318.** Решите неравенство:

а) $x^2 + 2|x - 1| - 6 < 0$;
б) $x^2 + |x - 3| - 9 < 0$;
в) $3x^2 - 5|x - 2| + 8 < 0$;
г) $2x^2 - 7|x - 1| + 3 < 0$.

**319.** Решите неравенство:

а) $\dfrac{7}{|2x + 3|} \leqslant 5x + 6$;
б) $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{|x + 1|} < 0$.

**320.** Решите двойное неравенство:

а) $1 < |3x - 8| < 5$;
б) $2 < |7 - 5x| < 12$;
в) $1 \leqslant |2x - 11| \leqslant 5$;
г) $3 \leqslant |15 - 2x| \leqslant 7$.

**321.** При каких значениях $a$ всякое решение двойного неравенства $3 < |x - 2| < 4$ является решением неравенства $x + 2a < 0$?

**322.** Найдите, при каких значениях $x$ точки графика функции $y = |2x - 3|$ расположены внутри полосы, ограниченной прямыми $y = 2$ и $y = 5$. Проиллюстрируйте ответ, построив график функции $y = |2x - 3|$.

**323.** Найдите множество значений $x$, удовлетворяющих совокупности:

а) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 < 0, \\ 2 - x^2 > 0, \end{cases} \\ |0{,}8 - 2x| < 1; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 < 0, \\ 1{,}3 - x^2 > 0, \end{cases} \\ |8x - 0{,}4| < 6. \end{array}\right.$

**324.** Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} |x - 3| \leqslant 2, \\ |3 - 2x| \leqslant 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |2x - 5| < 5, \\ |5x + 1| < 21; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x + 4| > 2, \\ |2x - 3{,}5| < 0{,}5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |3x - 1| \leqslant 7, \\ |x - 7| \leqslant 2. \end{cases}$

**325.** Найдите множество значений $x$, удовлетворяющих совокупности:

а) $\left[\begin{array}{l} |x^2 - 3x| < |x|, \\ x^2 - 11 < 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} |3x - 5| < |x|, \\ x^2 - x < 2. \end{array}\right.$

### Упражнения для повторения

**326.** Решите уравнение:

а) $x^3 - 15x + 14 = 0$; б) $x^3 - x^2 - 7x - 5 = 0$.

**327.** Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2 + 2$ и $y = 6|x - 1|$.

**328.** Изобразите схематически график функции

$$y = x^2 - 9|x| + 8$$

и укажите промежутки возрастания и убывания этой функции.

### Контрольные вопросы и задания

**1.** Объясните, как решают уравнения и неравенства вида $|f(x)| = b$, $|f(x)| < b$, $|f(x)| > b$, где $b$ — положительное число.

**2.** Объясните, как решают уравнения и неравенства вида $|f(x)| = |g(x)|$, $|f(x)| > |g(x)|$, $|f(x)| < |g(x)|$.

**3.** На примере уравнения $|x + 1| + |x - 4| = 7$ и неравенства $|x| + |x - 2| < 3$ объясните, как решают уравнения и неравенства такого вида, освобождаясь от знака модуля на промежутках, в которых выражение, записанное под знаком модуля, сохраняет знак.

# § 7. УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

## 16. Целые уравнения с параметрами

Решим уравнения:

$$8x = 7, \quad 15x = 7, \quad -11x = 7, \quad 0x = 7.$$

Корень первого уравнения — число $\frac{7}{8}$, второго — число $\frac{7}{15}$, третьего — число $-\frac{7}{11}$, четвертое уравнение корней не имеет.

Каждое из данных уравнений имеет вид $ax = 7$. В зависимости от $a$ возникают разные случаи: если $a \neq 0$, то уравнение имеет корень $\frac{7}{a}$, если $a = 0$, то уравнение корней не имеет.

Рассматривая уравнение $ax = 7$, мы придавали буквам $a$ и $x$ разный смысл, считая, что буквой $x$ обозначено неизвестное число, а буквой $a$ — некоторое фиксированное число, значение которого в каждом конкретном случае известно. В таких случаях говорят, что $a$ является *параметром*, а уравнение называют *уравнением с параметром*.

С понятием параметра вы, в сущности, уже встречались, хотя сам термин «параметр» не вводился. Так, при рассмотрении вопроса о корнях линейного уравнения с одним неизвестным это уравнение записывали в виде $ax = b$. Здесь параметрами служили буквы $a$ и $b$. При выводе формулы корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ параметрами считали его коэффициенты $a$, $b$ и $c$. При изучении линейной функции $y = kx + b$ за параметры принимали коэффициенты $k$ и $b$.

Рассматривая уравнение $ax = 7$, мы выделили случаи, когда $a \neq 0$ и когда $a = 0$, и установили, что при $a \neq 0$ уравнение имеет корень $\frac{7}{a}$, а при $a = 0$ уравнение не имеет корней. Таким образом, мы установили, как можно найти корень уравнения при любом значении $a$. В таких случаях говорят, что мы *решили уравнение с параметром* $a$.

Вообще *решить уравнение с параметром — это значит установить соответствие, позволяющее для любого значения параметра найти соответствующее множество корней.*

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение с параметром $a$:

$$ax - 2x = a^2 + a - 6.$$

Вынесем многочлен $x$ за скобки:

$$(a - 2)x = a^2 + a - 6.$$

Мы имеем линейное уравнение, число корней которого зависит от того, равен ли нулю коэффициент при $x$ или отличен от нуля.

Если $a - 2 \neq 0$, т. е. $a \neq 2$, то уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{a^2 + a - 6}{a - 2}.$$

Отсюда

$$x = \frac{(a - 2)(a + 3)}{a - 2} = a + 3.$$

Если $a - 2 = 0$, т. е. $a = 2$, то уравнение принимает вид $0x = 0$. В этом случае любое число является корнем уравнения.

Ответ: $a + 3$ при $a \neq 2$; любое число при $a = 2$.

Пример 2. Решим квадратное уравнение с параметром $b$:

$$3x^2 - 6x + b = 0.$$

Найдем дискриминант этого уравнения: $D = 36 - 12b$. Рассмотрим случаи, когда $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

Пусть $36 - 12b > 0$, т. е. $12b < 36$, $b < 3$. В этом случае уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{36 - 12b}}{6}, \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{36 - 12b}}{6}.$$

Если $36 - 12b = 0$, т. е. $b = 3$, то уравнение имеет единственный корень — число 1.

Если $36 - 12b < 0$, т. е. $b > 3$, то уравнение не имеет корней.

Ответ: $\dfrac{6 - \sqrt{36 - 12b}}{6}$ и $\dfrac{6 + \sqrt{36 - 12b}}{6}$ при $b < 3$; 1 при $b = 3$; нет корней при $b > 3$.

Другой вид задач, относящихся к целым уравнениям с параметрами, связан с исследованием уравнений. Например, для уравнения с параметрами можно иногда определить число корней при различных значениях параметров, оценить значения корней в зависимости от значений параметров и т. п.

Рассмотрим примеры.

Пример 3. Найдем, при каких значениях параметра $a$ биквадратное уравнение

$$x^4 - (a + 2)x^2 + 3a - 3 = 0$$

имеет четыре корня.

Введем новую переменную $y = x^2$. Получим квадратное уравнение

$$y^2 - (a + 2)y + 3a - 3 = 0.$$

Данное биквадратное уравнение имеет четыре корня в тех и только в тех случаях, когда полученное квадратное уравнение имеет два положительных корня.

Найдем дискриминант квадратного уравнения:

$$D = (a + 2)^2 - 4(3a - 3) = a^2 + 4a + 4 - 12a + 12 =$$
$$= a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2.$$

Из теоремы, обратной теореме Виета, следует, что рассматриваемое квадратное уравнение имеет два положительных корня при значениях $a$, удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases}(a-4)^2 > 0,\\ 3a-3>0,\\ -(a+2)<0.\end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{cases}a \neq 4,\\ a>1,\\ a>-2,\end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases}a>1,\\ a\neq 4.\end{cases}$$

Значит, данное биквадратное уравнение имеет четыре корня при любых значениях $a$, больших 1, кроме $a = 4$.

Ответ: $a \in (1; 4) \cup (4; +\infty)$.

Пример 4. Найдем, при каких значениях $a$ уравнение

$$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a - 3 = 0$$

имеет два корня, принадлежащих промежутку $(-5; 5)$.

Данное уравнение имеет два корня, если дискриминант его положителен.

Находим, что

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (a^2 + 2a - 3) = 4,$$

т. е. $D > 0$ при любом значении $a$.

Отсюда

$$x_1 = a + 1 - \sqrt{4} = a - 1,\ x_2 = a + 1 + \sqrt{4} = a + 3.$$

Решим систему

$$\begin{cases}-5 < a - 1 < 5,\\ -5 < a + 3 < 5.\end{cases}$$

Первое двойное неравенство верно, когда $-4 < a < 6$, а второе — когда $-8 < a < 2$. Находя с помощью координатной прямой (рис. 59) пересечение промежутков $(-4; 6)$ и $(-8; 2)$, получаем, что условию задачи удовлетворяют значения $a$, принадлежащие объединению промежутков $(-4; 2)$.

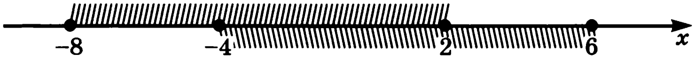



Рис. 59

Ответ: при $a \in (-4; 2)$.

**329.** Зная, что один из корней уравнения

$$x^3 + bx^2 = bx + 5 - 4x^2$$

с параметром $b$ равен $-1$, определите, чему равно $b$, и найдите другие корни.

**330.** Какие случаи надо выделить при решении уравнения с параметром $a$? Для каждого случая найдите множество корней.

**331.** Решите относительно $x$ уравнение:

а) $ax = a + 6$;
б) $c(c - 2)x = c^2 - 4$;
в) $p^2x - 3px = p^2 - 9$;
г) $ax + 5a = 30 + 6x$;
д) $ax + 8x = a^2 + 6a - 16$;
е) $b^2x - x = b^2 + 4b - 5$;
ж) $cx + x(2 - 5c) = 1 - 2c$;
з) $(a^2 + 1)x + a(a - 2x) = 1$.

**332.** Решите уравнение с параметром $a$:

а) $2x + \dfrac{x}{a} = 3$;
б) $\dfrac{x}{a-2} = x - 1$;
в) $\dfrac{x-a}{a-1} = \dfrac{x-2}{a}$;
г) $\dfrac{y+8}{a} - a = \dfrac{y-4}{2}$;
д) $\dfrac{x}{a-1} - x = \dfrac{5}{a+1}$;
е) $\dfrac{3y-1}{a} - \dfrac{1}{a+1} = y$.

**333.** При каких значениях параметра $b$ уравнение $\dfrac{5x}{6} - b = \dfrac{1}{3}$ имеет:

а) положительный корень;
б) корень, принадлежащий промежутку $(-1; 4)$;
в) корень, находящийся вне промежутка $[-2; 6]$?

**334.** При каких значениях параметра $p$ уравнение

$$(3x + p + 2)^2 - (3x - p + 1)^2 = 12x + 4$$

имеет:

а) отрицательный корень:
б) корень, принадлежащий промежутку $(-0{,}5; 0{,}5)$?

**335.** При каких значениях параметра $a$

а) уравнение $a^2x + 6 = 12 - ax$ имеет положительный корень;
б) уравнение $ax + 8 = 7a^2x - 4$ имеет отрицательный корень?

**336.** При каких значениях параметра $a$ имеет два корня уравнение:

а) $4x^2 - 2x + a = 0$;
б) $ax^2 + 8x + 4 = 0$;
в) $2x^2 + (a - 4)x - 2a = 0$;
г) $3x^2 + (2a + 3)x + a + 2 = 0$?

**337.** При каких значениях параметра $t$ имеет единственный корень уравнение:
а) $x^2 - tx + 36 = 0$; в) $(t-1)x^2 + tx - 1 = 0$;
б) $tx^2 - 6x + 4 = 0$; г) $tx^2 + (t - 6)x - 1 = 0$?

**338.** При каких значениях параметра $b$ не имеет корней уравнение:
а) $3x^2 + 6x + 2b = 0$;
б) $bx^2 - 16x + 8 = 0$;
в) $bx^2 + (b - 4)x + b - 2 = 0$;
г) $(b - 3)x^2 - 2(b - 9)x + b + 3 = 0$?

**339.** Докажите, что при любых значениях $a$ и $b$ имеет корни уравнение:
а) $(x - a)(x - b) = a^2$; б) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 - c^2 = 0$.

**340.** Решите уравнение $ax^2 + 4x + 1 = 0$ с параметром $a$.

**341.** Решите относительно $x$ уравнение:
а) $ax^2 - x = 0$; д) $x^2 - 6x + a = 0$;
б) $x^2 + 4a = 0$; е) $ax^2 + 4x - 2 = 0$;
в) $ax^2 - 6 = 3x^2 - 2a$; ж) $x^2 - 8x = c^2 - 8c$;
г) $px^2 + 16 = 4x^2 + p^2$; з) $x^2 - 6a = a^2 + 6x$.

**342.** Решите относительно $y$ уравнение:
а) $\frac{y^2}{4a} - 1 = \frac{y}{a} - \frac{y}{4}$; в) $\frac{(y-1)^2}{2} = \frac{1-6y}{c} + \frac{y^2}{2}$.
б) $\frac{(y+1)^2 - y + 2}{4} = \frac{y}{2} + \frac{6}{a}$;

**343.** Решите уравнение $3(x - 2) - 2(y + 11) + 4 = 0$
а) относительно $x$; б) относительно $y$.

**344.** Решите уравнение $2x^2 - 4xy + 1 = 0$
а) относительно $x$; б) относительно $y$.

**345.** При каких значениях параметра $a$ сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax = 2x + a + 3$ равна 18?

**346.** При каких значениях параметра $b$ уравнение
$$2x^2 - (2b - 5)x + b - 3 = 0$$
имеет два корня, принадлежащие промежутку $(-1; 1)$?

**347.** При каких значениях параметра $p$ уравнение
$$(1 - p^2)x^2 + 2px - 1 = 0$$
имеет два корня, принадлежащие промежутку $(0; 1)$?

**348.** Докажите, что уравнение

$$(a + b + c)x^2 = 2(a + b)x - a - b + c$$

имеет рациональные корни при рациональных значениях параметров $a$, $b$ и $c$.

**349.** Докажите, что уравнение $x^2 + bx + c = 0$ не имеет рациональных корней, если значениями параметров $b$ и $c$ являются целые нечетные числа.

**350.** Решите относительно $x$ уравнение, используя разложение на множители:
а) $x^3 + x = a^2x - a$; б) $x(x^2 - 1) - 2a = 2ax$.

**351.** При каких значениях параметра $b$ уравнение

$$x^4 - bx^2 - (b + 1) = 0$$

имеет два корня?

**352.** При каких значениях параметра $a$ имеет четыре корня уравнение:
а) $x^4 - (a + 1)x^2 + a = 0$; б) $x^4 - 2ax^2 + (6a - 9) = 0$?

**353.** Известно, что числа $m$ и $n$ являются корнями уравнения $x^2 + ax + b = 0$ с параметрами $a$ и $b$. Составьте биквадратное уравнение с теми же параметрами, имеющее четыре корня: $-m$, $-n$, $m$ и $n$.

**354.** Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку этого графика с абсциссой:
а) $x = -1$, если $f(x) = 4x^2$; б) $x = 2$, если $f(x) = -2x^2$.

## Упражнения для повторения

**355.** Решите уравнение:
а) $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$; в) $x^3 + 7x - 8 = 0$;
б) $x^3 + 7x^2 - 16x - 112 = 0$; г) $x^3 + 7x + 8 = 0$.

**356.** Найдите множество решений двойного неравенства:
а) $1 < \dfrac{3x - 1}{x + 2} < 3$; б) $-1 < \dfrac{x - 2}{x + 3} < 1$.

**357.** Покажите, как расположены на координатной плоскости графики функций $y = k_1x$ и $y = k_2x$, если
а) $k_1 > k_2 > 0$; б) $k_1 < k_2 < 0$; в) $k_1 < 0$, $k_2 > 0$.

## 17. Дробно-рациональные уравнения с параметрами

Вам известен общий прием решения дробно-рациональных уравнений с числовыми коэффициентами. Для того чтобы решить такое уравнение, умножают обе его части на общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, решают полученное целое уравнение и исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей. Аналогичным образом поступают при решении дробно-рациональных уравнений с параметрами.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим относительно $x$ уравнение

$$\frac{4}{x-3}-\frac{b}{2}=2.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на выражение $2(x-3)$. Получим уравнение

$$8-bx+3b=4x-12.$$

Отсюда

$$(4+b)x=20+3b.$$

Если $4+b=0$, т. е. $b=-4$, то полученное линейное уравнение не имеет корней, а значит, не имеет корней и заданное дробно-рациональное уравнение. Если $4+b\neq 0$, т. е. $b\neq -4$, то рассматриваемое линейное уравнение имеет единственный корень $x=\frac{20+3b}{4+b}$. Однако из условия $2(x-3)\neq 0$ следует, что для заданного дробно-рационального уравнения надо исключить те значения $b$, при которых $x=3$. Из равенства $\frac{20+3b}{4+b}=3$ находим, что таких значений нет. Итак, если $b\neq -4$, то заданное уравнение имеет единственный корень $x=\frac{20+3b}{4+b}$, а если $b=-4$, то уравнение не имеет корней.

Ответ: $\frac{20+3b}{4+b}$ при $b\neq -4$, корней нет при $b=-4$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{2x}{2x+a}-\frac{a-2}{2x-a}-\frac{4a-2a^2}{4x^2-a^2}=0.$$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей и выполнив приведение подобных членов, получим квадратное уравнение

$$4x^2 - 4(a-1)x + a^2 - 2a = 0.$$

Решив его, найдем, что $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a-2}{2}$. Первый корень не удовлетворяет исходному дробно-рациональному уравнению, так как при $x = \frac{a}{2}$ общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, обращается в нуль. Остается еще выяснить, при каких значениях $a$ второй корень является посторонним для данного уравнения. Подставив в равенство $4x^2 - a^2 = 0$ вместо $x$ выражение $\frac{a-2}{2}$, получим $a = 1$. Это значение $a$ надо исключить.

Итак, при $a \neq 1$ заданное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{a-2}{2}$, а при $a = 1$ уравнение не имеет корней.

Ответ: $\frac{a-2}{2}$ при $a \neq 1$, корней нет при $a = 1$.

Рассмотрим теперь пример исследования уравнения с параметром.

Пример 3. Найдем, при каких значениях параметра $a$ уравнение

$$ax = \frac{3x-1}{3x} + \frac{a}{3}$$

имеет два корня, каждый из которых принадлежит промежутку $(-1; 1)$.

Умножив обе части уравнения на $3x$ и выполнив преобразования, получим уравнение

$$3ax^2 - (a+3)\,x + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня, если $a \neq 0$ и $D > 0$. Так как $D = (a+3)^2 - 12a = (a-3)^2$, то $D > 0$ при $a \neq 3$. При $a \neq 0$ и $a \neq 3$ рассматриваемое целое уравнение имеет корни $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{1}{a}$. Оба эти корня удовлетворяют дробно-рациональному уравнению. Первый корень принадлежит промежутку $(-1; 1)$. Второй корень принадлежит этому промежутку при значениях $a$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} -1 < \frac{1}{a} < 1, \\ a \neq 0, \\ a \neq 3. \end{cases}$$

Множеством решений этой системы является объединение промежутков $(-1; 0)$ и $(0; 1)$.

Ответ: при $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

**358.** Верно ли утверждение, что при любом значении $a$ корень уравнения $(x - 2)(a - 1) = 5$ является корнем уравнения $\frac{5}{x-2} = a - 1$?

**359.** Решите относительно $x$ уравнение:

а) $x - 2a = \frac{1 - a^2}{x}$;

б) $x + 3 + \frac{2}{x} = 2a - \frac{a^2 - 3a}{x}$;

в) $\frac{a}{x-3} - \frac{5}{x+3} = \frac{18}{x^2 - 9}$;

г) $\frac{6}{x^2 - 16} - \frac{1}{x-4} = \frac{3a}{4+x}$.

**360.** Решите относительно $y$ уравнение:

а) $\frac{5a}{y-a} - \frac{5y}{y+a} = 7$;

б) $\frac{10-a}{y+3} + \frac{6}{y^2-9} = \frac{2}{y-3}$;

в) $\frac{6-y}{y+2} - \frac{2}{y-a} + 1 = 0$;

г) $\frac{3y}{2y-b} - \frac{4b}{y+b} - 1 = 0$.

**361.** Решите уравнение $\frac{xy}{x+1} = y - 1$

а) относительно $x$; б) относительно $y$.

**362.** При каких значениях параметра $c$ уравнение

$$x + \frac{1}{x} = c + \frac{1}{c}$$

имеет единственный корень?

**363.** При каких значениях параметра $b$ уравнение

$$\frac{2}{1-x} = b - 5$$

имеет единственный корень и этот корень принадлежит промежутку $(-1; 1)$?

**364.** Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = \frac{x-a}{x+2}$; б) $y = \frac{ax-4}{x+2}$.

**365.** Решите уравнение с параметром $a$:

$$\frac{x^2+1}{ax-2} - \frac{a}{2-ax} = x.$$

**366.** Найдите целые значения параметра $a$, при которых уравнение

$$1 + \frac{3ax - 13x}{x^2 - a^2} = \frac{13a - 3a^2}{a^2 - x^2}$$

имеет единственный корень и этот корень принадлежит промежутку $(-5;\ 5)$.

**367.** Решите уравнение относительно $x$:

$$\frac{ax - 2b^2}{b^2} = \frac{b^2 - 2a^3x}{a^3x}.$$

**368.** Решите уравнение с параметрами $a$ и $b$:

а) $\dfrac{x^2 + 2bx}{a^2 + b^2 + 2ab} - \dfrac{2x - a + b}{a + b} = 0;$

б) $\dfrac{x - a}{x - b} + \dfrac{x - b}{x - a} + 2 = 0.$

## Упражнения для повторения

**369.** Решите уравнение:

а) $|4{,}5 - |3{,}5x - 2|| = 3;$

б) $|x - 4| + |x + 1| + |x + 5| = 12.$

**370.** При каких значениях $x$ имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{(2x - 4)(3 - 2x - x^2)}}{4x - 5};$ б) $\dfrac{\sqrt{(x^2 + x)(2x^2 - 13x + 15)}}{2x - 9}?$

**371.** В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = -|x^2 - 7x - 6|;$ б) $y = -x^2 + |x| - 6?$

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Объясните, какое уравнение называется уравнением с параметром. Приведите примеры.

**2.** Что значит решить уравнение с параметром?

**3.** На примере уравнений

$$ax - 5x = a^2 - 4a + 5 \quad \text{и} \quad 2x^2 - 4x + a = 0$$

с параметром $a$ объясните, как решают линейные и квадратные уравнения с параметром.

**4.** На примере уравнения $\dfrac{a}{x - 2} - \dfrac{4}{x + 2} = \dfrac{7}{x^2 - 4}$ объясните, как решают дробно-рациональное уравнение с параметром.

## Дополнительные упражнения к главе 2

### К параграфу 4

**372.** Докажите, что если ни один из делителей числа $a_n$, не равного нулю, не является корнем уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами, то это уравнение не имеет рациональных корней.

**373.** Решите уравнение:

а) $x^3 - x - 6 = 0$;
б) $x^3 - 5x + 4 = 0$;
в) $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$;
г) $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$;
д) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$;
е) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$.

**374.** Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 2x^3 - x^2 - x$ и $y = 6x - 6$;
б) $y = x^3 + 3x^2 - x$ и $y = x^2 + 28x - 42$.

**375.** Составьте биквадратное уравнение, зная, что один из его корней равен $\sqrt{5}$, а другой равен $3 - \sqrt{2}$.

**376.** Решите уравнение:

а) $(x^2 + 6x)^2 - 4(x^2 + 6x + 1) - 17 = 0$;
б) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x - 4) + 6 = 0$;
в) $x(x - 2)(x - 3)(x - 5) = 72$;
г) $(x - 3)(x + 2)(x - 6)(x - 1) = -56$.

**377.** Решите уравнение:

а) $x^4(x + 1)^4 - 40x^2(x + 1)^2 + 144 = 0$;
б) $\dfrac{(x + 3)^4}{x^4} - \dfrac{64(x + 3)^2}{x^2} + 900 = 0$.

**378.** Докажите, что уравнение

$$\frac{x - 1}{x^2 + 6x} + \frac{x - 2}{x^2 - 6x} = \frac{2x - 2}{x^2 - 36}$$

не имеет корней.

**379.** Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{3}{x^2 + 2} - \dfrac{x + 2}{x^4 - 4} = \dfrac{3x - 5}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$;

б) $\dfrac{8}{x^2 + 3} - \dfrac{x + 7}{x^4 - 9} = \dfrac{8x - 20}{x^3 + x^2 - 3x - 3}$.

**380.** Решите уравнение:

а) $\dfrac{6}{4x^3+x+1}=\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{2x}{2x^2-x+1}$;

б) $\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{1}{8x^3-4x^2+2x-6}=\dfrac{6x}{3+2x+4x^2}$;

в) $\dfrac{40}{2x^3+11x^2-3}-\dfrac{3}{2x-1}=\dfrac{8x+2}{x^2+6x+3}$;

г) $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}+\dfrac{7}{x^2+3}=\dfrac{63}{x^4+2x^2-3}$.

**381.** Решите уравнение

$$\frac{1}{x^2+2x-4}+\frac{1}{x^2+2x+4}=\frac{1}{x^2+2x-5}.$$

## К параграфу 5

**382.** Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $(7x-1)(x-5)-(12x-4)(x+1)>0$;
б) $5x(x+2)+(1+2x)(2-2x)<0$;
в) $(5x-1)(x+1)-2x(2x+3)<0$;
г) $(3-2x)(x-1)+(3x-1)(x+4)<0$.

**383.** Найдите множество решений неравенства

а) $6x^2-0{,}8x-0{,}64<0$, принадлежащих промежутку $\left(-\dfrac{2}{15};\ \dfrac{4}{15}\right)$;

б) $3x^2-1{,}7x+0{,}2<0$, находящихся вне промежутка $\left[\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2}\right]$.

**384.** Найдите значения $a$, при которых верно при любом $x$ неравенство:

а) $3x^2-2x+a>0$;
б) $-x^2-4x-a<0$;
в) $ax^2-2x+1>0$;
г) $ax^2+4x+1>0$.

**385.** Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}2x^2-17x-19<0,\\0{,}3x^2-4{,}8<0,\\5x-2>0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}4x^2+5x-21\leqslant 0,\\x^2-x\leqslant 0,\\2-5x\geqslant 0.\end{cases}$

**386.** При каких значениях $a$ каждое решение неравенства $3(a-4x)+2(x-4)<0$ является решением неравенства $x^2-4x+3>0$?

**387.** При каких значениях $m$ все точки графика функции $y = x^2 + 2(m - 1)x + m(1 - m)$ расположены выше оси $x$?

**388.** Решите неравенство:

а) $x^4 - 34x^2 - 72 < 0$;
б) $x^4 - 2x^2 - 15 \leqslant 0$;
в) $x^4 + x^2 - 30 < 0$;
г) $x^4 + 9x^2 - 22 \geqslant 0$;
д) $x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0$;
е) $x^4 + 5x^3 - x - 5 \geqslant 0$.

**389.** Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$;
б) $y = \sqrt{x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x}$;
в) $y = \sqrt{x^3 + 7x - 8}$;
г) $y = \sqrt{x^3 - x^2 + 3x + 5}$.

**390.** При каких значениях $a$ множеством решений неравенства $(3x - a)^2(2x + 5)(x - 0{,}9) < 0$ является числовой промежуток $(-2{,}5;\ 0{,}9)$?

**391.** Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $\dfrac{x^3 + 4x - 5}{(x - 3)^2} < 0$;
б) $\dfrac{7}{x^2 - 5x + 6} + 1 < \dfrac{9}{3 - x}$.

**392.** Решите неравенство:

а) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x - 10}{3 - 2x} > 0$;
б) $\dfrac{x^3 - x^2 + x - 6}{18x - 27} < 0$;
в) $\dfrac{x^4 - 2x^3 - 8x + 16}{x^3} \geqslant 0$;
г) $\dfrac{x^4 - 10x^2 + 24}{x^2 - 3} < 0$.

**393.** При каких $b$ значения дроби $\dfrac{3 - 2b}{b + 4}$

а) принадлежат промежутку $(-4;\ 1)$;
б) находятся вне промежутка $[-1{,}5;\ 3]$?

## К параграфу 6

**394.** Найдите все целые числа, удовлетворяющие уравнению:

а) $|x - 2{,}5| + |x - 4{,}5| = 2$;
б) $|x + 3| + |x - 2| = 5$.

**395.** Решите уравнение:

а) $6x^2 - 7|x| - 3 = 0$;
б) $x^2 - 18|x - 2| - 4 = 0$;
в) $x|x - 6| + 7 = 0$;
г) $x|13 - x| - 22 = 0$.

**396.** Найдите все корни уравнения $x^2 + 6|3 - x| - 34 = 0$, принадлежащие промежутку $(-5; 5)$.

**397.** Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = x^2 - 5|x| + 6$ и $y = |x - 6|$;

б) $y = |x^2 + 3x - 10|$ и $y = x^2 - 10$.

**398.** Найдите корни уравнения

а) $x^4 - 6|x^2 - 1| - 6 = 0$, принадлежащие промежутку $(-4; 4)$;

б) $x^4 - 10|x^2 - 2| - 11 = 0$, принадлежащие промежутку $(-6; 6)$.

**399.** Решите неравенство:

а) $(|x - 2| - 4)(|x - 3| - 6) < 0$;

б) $(|x + 1| - 3)(|x - 5| + 10) > 0$.

**400.** Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $|7{,}5 + |3x - 2|| < 19{,}5$; б) $|2{,}6 + |3x + 1|| < 17{,}6$.

**401.** Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенству:

а) $x^2 - 5|x + 6| + 34 < 0$; б) $x^2 + |x - 7| - 13 < 0$.

**402.** Решите неравенство:

а) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{|x| - 5} > 0$; в) $\dfrac{|x - 5| + x}{x + 3} > 1$;

б) $\dfrac{x^2 - 7x - 8}{|x - 6|} < 0$; г) $\dfrac{|2 - x| + 5x}{x + 2} < 2$.

**403.** Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 10x^2 + x - 0{,}6 < 0, \\ x^2 \leqslant 0{,}25, \\ |5x - 1| < 0{,}4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2 + x - 1 \leqslant 0, \\ x^2 \leqslant 0{,}4x, \\ |2x + 0{,}5| < 0{,}1. \end{cases}$

**404.** При каких значениях $a$ каждое решение совокупности $\left[\begin{array}{l} 5x^2 - 14x - 3 \leqslant 0, \\ |x - 2{,}5| \leqslant 1{,}5 \end{array}\right.$ является решением неравенства $|x| \leqslant a$?

## К параграфу 7

**405.** Найдите все натуральные значения параметра $c$, при которых имеет два корня уравнение:

а) $cx^2 + 1 = x^2 - 8x - c$; б) $15c^2 - 16x = x^2 - 2x - 1$.

**406.** При каком условии уравнение

$$ax^2 + 2ax = 2bx - a - b^2$$

с параметрами $a$ и $b$:

а) имеет один корень;

б) имеет два корня;

в) не имеет корней?

**407.** Решите уравнение $|x^2 + 3x + 4| = m$, где $m$ — параметр.

**408.** Решите относительно $x$ уравнение:

а) $|0{,}3x - 4{,}5| = a - 2$; б) $|6 - 2x| = a + 8$.

**409.** Решите уравнение $xy^2 - x = 4y + 4$:

а) относительно $x$; б) относительно $y$.

**410.** При каких значениях $a$ график функции $y = (x - a)^2 - 9$ пересекает ось абсцисс в точках, абсциссы которых принадлежат промежутку $(-6; 6)$?

**411.** Решите относительно $x$ уравнение:

а) $7ax - 3x = 7a^2 + 4a - 3$;

б) $2ax - bx = 2a^2 - 3ab + b^2$;

в) $x^2 - (a - b)x + a^2 - ab - 2b^2 = 0$;

г) $x^2 - 5ax + 5bx + 6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0$.

**412.** Решите уравнение с параметром $a$:

а) $x^4 - (a^2 + 4)x^2 + 4a^2 = 0$; б) $8x^4 - ax^2 = 8x^2 - a$.

**413.** Решите относительно $x$ уравнение

$$x^3 = (a - 1)x^2 + a^2.$$

**414.** Решите уравнение с параметром $a$:

$$\frac{2a + 3}{x + a} - \frac{2a - 3}{a - x} = \frac{2a}{3}.$$

**415.** Решите уравнение с параметрами $a$ и $b$:

а) $\dfrac{a - 2b}{x^2 - 4bx} = \dfrac{1}{a + 2b}$; б) $\dfrac{1 + bx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{a - x}$.

**416.** При каком условии прямая $y = ax + b$ имеет более двух общих точек с графиком функции $y = |x - 1| + |x - 3|$?

# ГЛАВА 3 СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

## § 8. УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

### 18. Уравнение с двумя переменными и его график

Уравнения $x(x - y) = 4$, $2y - x^2 = -2$, $x(x + y^2) = x + 1$ могут служить примерами уравнений с двумя переменными.

Если в уравнение $x(x - y) = 4$ подставить вместо переменной $x$ ее значение $-1$, а вместо $y$ — значение 3, то получится верное равенство

$$-1 \cdot (-1 - 3) = 4.$$

Пара $(-1; 3)$ значений переменных $x$ и $y$ является *решением уравнения* $x(x - y) = 4$. Уравнение с двумя переменными имеет, как правило, бесконечно много решений.

Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными уравнениями*.

Любое целое уравнение с двумя переменными можно заменить равносильным уравнением, в котором правая часть будет нулем, а левая — многочленом стандартного вида. Степень этого многочлена называют *степенью уравнения с двумя переменными*. Так, например, уравнение

$$x(x + y^2) = x + 1$$

есть уравнение третьей степени. Используя тождественные преобразования и свойства уравнений, его можно преобразовать в уравнение $xy^2 + x^2 - x = 0$, правая часть которого — нуль, а левая — многочлен стандартного вида третьей степени.

Линейное уравнение с двумя переменными, т. е. уравнение вида $ax + by + c = 0$, является уравнением первой степени, если $a$ или $b$ не равны нулю.

Если все решения уравнения с двумя переменными изобразить точками в координатной плоскости, то получится *график уравнения с двумя переменными*. Так, графиком уравнения $2y - x^2 = -2$ является парабола, показанная на рисунке 60.

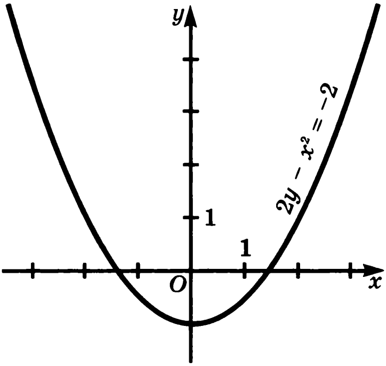



Рис. 60

Если в уравнении $ax + by = c$ хотя бы один из коэффициентов $a$ или $b$ не равен нулю, то его графиком является прямая. Если $a = b = 0$, то при $c = 0$ графиком этого уравнения является координатная плоскость, а при $c \neq 0$ — пустое множество.

Построение графиков некоторых уравнений облегчается использованием преобразований графиков.

Рассмотрим преобразования графиков уравнений с двумя переменными. Любое уравнение с двумя переменными можно привести к такому виду, когда в его правой части будет 0, а в левой — выражение с двумя переменными. Выражение с переменными $x$ и $y$ можно обозначить так: $F(x; y)$. Читают: «$F$ от $x$ и $y$».

Сформулируем правила, по которым выполняются простейшие преобразования графиков уравнений $F(x; y) = 0$.

1) График уравнения $F(-x; y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ с помощью симметрии относительно оси $y$.

2) График уравнения $F(x; -y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ с помощью симметрии относительно оси $x$.

3) График уравнения $F(-x; -y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ с помощью центральной симметрии относительно начала координат.

4) График уравнения $F(x - a; y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ с помощью перемещения параллельно оси $x$ на $|a|$ единиц (вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$).

5) График уравнения $F(x; y - b) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ с помощью перемещения на $|b|$ единиц параллельно оси $y$ (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$).

6) График уравнения $F(ax; y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ с помощью сжатия к оси $y$ в $a$ раз, если $a > 1$, и с помощью растяжения от оси $y$ в $\frac{1}{a}$ раз, если $0 < a < 1$.

7) График уравнения $F(x; by) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ с помощью сжатия к оси $x$ в $b$ раз, если $b > 1$, и с помощью растяжения от оси $x$ в $\frac{1}{b}$ раз, если $0 < b < 1$.

8) График уравнения $F(|x|; y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$, отбросив ту часть графика уравнения

$F(x; y) = 0$, которая расположена в левой полуплоскости, и с помощью симметрии относительно оси $y$, отобразив в эту полуплоскость ту часть графика, которая расположена в правой полуплоскости.

9) График уравнения $F(x; |y|) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$, отбросив ту часть графика уравнения $F(x; y) = 0$, которая расположена в нижней полуплоскости, и с помощью симметрии относительно оси $x$, отобразив в эту полуплоскость ту часть графика, которая расположена в верхней полуплоскости.

Для примера проведем доказательство утверждения 1. Пусть точка $A(m; n)$ принадлежит графику уравнения $F(x; y) = 0$. Тогда верно равенство $F(m; n) = 0$. Точка $B(-m; n)$, симметричная точке $A$ относительно оси $y$, будет принадлежать графику уравнения $F(-x; y) = 0$, так как при подстановке в него вместо $x$ числа $-m$, а вместо $y$ числа $n$ получается верное равенство. Таким же образом можно показать, что любая точка графика уравнения $F(-x; y) = 0$ с помощью симметрии относительно оси $y$ переходит в точку, принадлежащую графику уравнения $F(x; y) = 0$. Значит, графики уравнений $F(x; y) = 0$ и $F(-x; y) = 0$ симметричны относительно оси $y$.

Из рассмотренных нами правил преобразования графиков уравнений с двумя переменными легко получаются правила преобразования графиков функций.

Пример 1. Покажем, что графиком уравнения

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$$

является окружность.

Уравнение $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$ можно преобразовать в равносильное ему уравнение $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$. Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 3^2$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3 единицам. При перемещении этой окружности влево на 1 единицу получается график уравнения

$$(x + 1)^2 + y^2 = 3^2.$$

При перемещении получившегося графика вверх на 4 единицы получается график уравнения

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$$

и, следовательно, график уравнения

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0.$$

Отсюда следует, что графиком данного уравнения является окружность с центром в точке $(-1; 4)$ и радиусом 3 единицы.

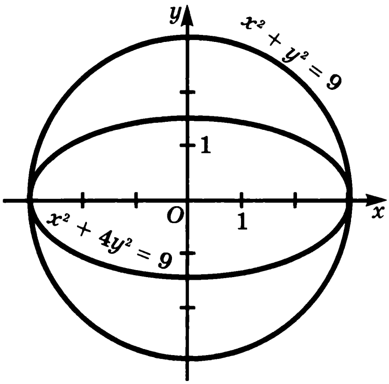



Рис. 61

Пример 2. Начертим график уравнения $x^2 + 4y^2 = 9$.

Представим $4y^2$ в виде $(2y)^2$, получим уравнение

$$x^2 + (2y)^2 = 9,$$

график которого можно получить из окружности $x^2 + y^2 = 9$ сжатием к оси $x$ в 2 раза.

Начертим окружность с центром в начале координат и радиусом 3 единицы (рис. 61). Уменьшим в 2 раза расстояние каждой ее точки от оси $x$, получим график уравнения $x^2 + (2y)^2 = 9$.

Заметим, что фигуру, которая получается сжатием окружности к одному из ее диаметров, называют *эллипсом*.

При построении (см. рис. 61) мы выполнили сжатие окружности $x^2 + y^2 = 9$ в 2 раза к ее диаметру, который лежит на оси $x$. Значит, в результате получили эллипс.

**417.** Какие из пар (5; 4), (1; 0), (−5; −4) и $\left(-1; -\frac{2}{7}\right)$ являются решениями уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 0$; б) $x^3 - 1 = x^2y + 6y$?

**418.** Найдите такие решения уравнения $xy^2 - x^2y = 12$, в которых

а) значение $x$ равно 3; б) значение $y$ равно −1.

**419.** Определите степень уравнения:

а) $2y^2 - 3x^3 + 4x = 2$;
б) $5y^4 - 3y^3x^2 + 2x^3 = 0$;
в) $(3x^2 + x)(4x - y^2) = x$;
г) $(5x + y)(5x - y) = 0$;
д) $(2y - x^2)^2 = x(x^2 + 4xy + 1)$;
е) $3xy = (y - x^3)(x^2 + y)$.

**420.** Найдите такие решения уравнения $y^2 - x^2 = 123$, в которых значения $x$ и $y$ — натуральные числа.

**421.** Какая фигура является графиком уравнения:

а) $2x = 5 + 3y$;
б) $6x^2 - 5x = y - 1$;
в) $2(x + 1) = x^2 - y$;
г) $(x + 1{,}5)(x - 4) = 0$;
д) $xy - 1{,}2 = 0$;
е) $x^2 + y^2 = 9$?

**422.** Постройте график уравнения:

а) $3x - 5y - 15 = 0$;
б) $(x + 3)(y - 5) = 0$;
в) $xy + 12 = 0$;
г) $x^2 + y^2 = 16$;
д) $x^2 - 2|x| - y = 0$;
е) $3|y| + x^2 = 0$.

**423.** Начертите график уравнения:

а) $(x-3)^2+y^2=9$;

б) $x^2+(y-2)^2=4$;

в) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$;

г) $x=y^2+2y-8$.

**424.** Постройте график уравнения:

а) $9x^2+y^2=4$; в) $3xy=12$;

б) $x^2+\frac{1}{4}y^2=4$; г) $\frac{1}{2}xy=6$.

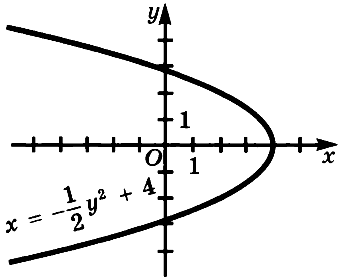



Рис. 62

**425.** Напишите уравнение, график которого симметричен графику уравнения $x^3-xy+3=0$ относительно

а) оси $x$; в) прямой $y=x$;

б) оси $y$; г) прямой $y=-x$.

**426.** Составьте уравнение, график которого получается растяжением графика уравнения $y=x^2-3$

а) от оси $x$ в 2 раза;

б) от оси $y$ в 3 раза.

**427.** Постройте график уравнения:

а) $(x-1)(|y|+2)=-4$;

б) $(|x|+1)(y-2)=-4$;

в) $(|x|+1)(|y|+2)=4$.

**428.** На рисунке 62 изображен график уравнения с двумя переменными. Найдите по графику (приближенно) два решения:

а) с одинаковыми значениями $x$;

б) с противоположными значениями $y$.

**429.** Постройте график уравнения:

а) $4x-xy=3y+12$;

б) $x^2y-5x^2-16y+80=0$.

**430.** Найдите такие решения уравнения $x^2-y^2=63$, в которых $x$ и $y$ — целые числа.

## Упражнения для повторения

**431.** Решите неравенство:

а) $64x^2-32x+7\leqslant 32x$; в) $4m^2+4m+5\geqslant 2$;

б) $x(2-3x)\leqslant 0$; г) $5(1-y^2)\geqslant 5-2y$.

**432.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0, \\ x = 2y + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 3y = 8, \\ -2x + 3y = 4. \end{cases}$

**433.** Найдите корни уравнения:

а) $9x^4 + 35x^2 - 4 = 0$; б) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

## 19. Система уравнений с двумя переменными

Задача. Сумма квадратов двух чисел равна 25. Разность чисел равна 1. Найдите эти числа.

Пусть первое число $x$, а второе $y$. По условию задачи сумма их квадратов равна 25. Это можно записать в виде уравнения с двумя переменными

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Разность чисел $x$ и $y$ равна 1. Это условие дает еще одно уравнение

$$x - y = 1.$$

В соответствии с задачей требуется найти такие пары значений $x$ и $y$, которые обращают оба уравнения $x^2 + y^2 = 25$ и $x - y = 1$ в верные равенства, т. е. решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

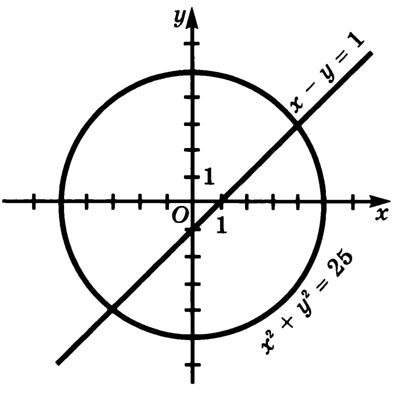


Рис. 63

Пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы уравнений с двумя переменными в верное равенство, называют *решением системы*. Решить систему — значит найти множество ее решений.

Построим графики уравнений системы (1). График первого уравнения есть окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5 (рис. 63). Графиком второго уравнения является прямая.

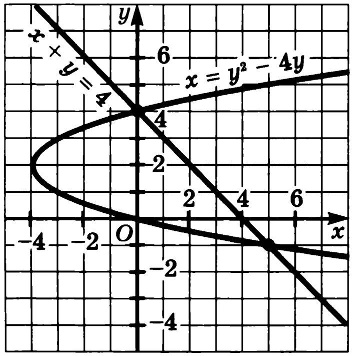



Рис. 64

Каждое решение уравнения с двумя переменными представляет координаты некоторой точки его графика. Каждое решение системы есть координаты общих точек графиков уравнений системы.

Графики уравнений системы (1) имеют две общие точки. Значит, эта система имеет два решения. Используя рисунок 63, найдем (приближенно) решения:

$$x_1 \approx 4,\ y_1 \approx 3$$
$$\text{и } x_2 \approx -3,\ y_2 \approx -4.$$

Если найденные приближенные значения $x$ и $y$ подставить в уравнения системы (1), то можно убедиться, что пары (4; 3) и (−3; −4) являются решениями этой системы.

Следовательно, имеется две пары чисел (4; 3) и (−3; −4), удовлетворяющие условию задачи.

При решении задачи мы применили *графический способ решения системы двух уравнений с двумя переменными*. Он состоит в том, что строят графики обоих уравнений и находят координаты общих точек этих графиков. Необходимо заметить, что графический способ позволяет находить решения системы лишь приближенно.

**434.** Какая из пар (2; −2) и (1; 2) является решением системы:

а) $\begin{cases} 3xy - y^2 + 16 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 12 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x^3 - 3y^2 = -7x, \\ (x + y)(y - x) = 3x? \end{cases}$

**435.** Какие из пар вида (2; $y$) и ($x$; 1) являются решениями системы:

а) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = x + 5y, \\ x^2 - 2y^2 = y - 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y^2 = 2y, \\ 3x - 5y - 7 = 0? \end{cases}$

**436.** Используя рисунок 64, решите систему

$$\begin{cases} x = y^2 - 4y, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

**437.** Сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} y + 12x = 2x^2 + 14, \\ x + 2 = y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(x - 2) = y + 12x, \\ xy - 5 = 0? \end{cases}$

**438.** Докажите, что не имеет решений система:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}09, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + 5, \\ y + x^2 = -2. \end{cases}$

**439.** Решите графическим способом систему:

а) $\begin{cases} y - x^2 = -1, \\ y - 2x = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y + x^2 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy - 1 = 0, \\ y + x^2 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16, \\ y + 4x = x^2 + 6. \end{cases}$

**440.** Найдите значение $a$, при котором система уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $y - x = a$ имеет одно решение, имеет два решения, не имеет решений. При каком наименьшем по модулю значении $a$ система имеет одно решение?

## Упражнения для повторения

**441.** Решите систему:

а) $\begin{cases} 4x - 3y + 2 = 0, \\ -2x + 6y - 2\frac{1}{2} = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x + 3y = 3, \\ x - 5y = 16\frac{1}{2}. \end{cases}$

**442.** Решите уравнение:

а) $\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 2 = 0;$ б) $(1 - 4x^2)^2 = 3(2 - 8x^2) - 9.$

## 20. Решение систем уравнений с двумя переменными способом подстановки и способом сложения

Любую систему двух линейных уравнений с двумя переменными можно решить способом подстановки или способом сложения. Иначе обстоит дело с системами уравнений более высоких степеней. Для них не существует общих способов решения. Лишь некоторые из них удается решить, используя способ подстановки или способ сложения. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим систему двух уравнений второй степени с двумя переменными

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 3y - 16 = 0, \\ y - x^2 + 6 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Выразим из второго уравнения переменную $y$ через переменную $x$. Получим

$$y = x^2 - 6.$$

Подставим в первое уравнение вместо $y$ выражение $x^2 - 6$. Получим систему, равносильную системе (1):

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 3(x^2 - 6) - 16 = 0, \\ y = x^2 - 6. \end{cases} \qquad (2)$$

В системе (2) первое уравнение есть уравнение второй степени с одной переменной. Решив его, найдем:

$$x_1 = 2, \ \ x_2 = -1.$$

Подставив в уравнение $y = x^2 - 6$ вместо $x$ его значения 2 и –1, найдем соответствующие им значения $y$:

$$y_1 = -2, \ \ y_2 = -5.$$

Значит, система (2), а следовательно, и равносильная ей система (1) имеют два решения: (2; –2) и (–1; –5).

Ответ: (2; –2), (–1; –5).

Таким образом, при решении системы двух уравнений с двумя переменными *способом подстановки*

1) выражают из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую;

2) подставляют вместо этой переменной полученное выражение во второе уравнение;

3) решают получившееся уравнение с одной переменной;

4) находят соответствующие значения второй переменной.

Способ подстановки применим тогда, когда из какого-либо уравнения системы можно выразить одну переменную через другую и решить получившееся уравнение с одной переменной. Этим требованиям удовлетворяет любая система, состоящая из уравнения первой степени и уравнения второй степени.

Пример 2. Решим систему

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + x + 16 = 0, \\ x - 2y + 7 = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения переменную $x$ через переменную $y$:

$$x = 2y - 7.$$

Подставим в первое уравнение вместо $x$ выражение $2y - 7$ и решим получившееся уравнение второй степени:

$$3(2y-7)^2 - 2y^2 + (2y-7) + 16 = 0,$$
$$12y^2 - 84y + 147 - 2y^2 + 2y - 7 + 16 = 0,$$
$$10y^2 - 82y + 156 = 0,$$
$$5y^2 - 41y + 78 = 0,$$
$$y_1 = 5{,}2, \quad y_2 = 3.$$

Найдем соответствующие значения $x$:

$$x_1 = 3{,}4, \quad x_2 = -1.$$

Ответ: (3,4; 5,2), (−1; 3).

Рассмотрим теперь применение *способа сложения*.

Пример 3. Решим систему

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + x = -6, \\ x^2 - 3y^2 = -11. \end{cases}$$

С помощью почленного сложения левых и правых частей уравнений можно исключить слагаемые, содержащие переменную $y$. Для этого надо предварительно умножить обе части первого уравнения на 3, а второго — на −2:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y^2 + 3x = -18, \\ -2x^2 + 6y^2 = 22. \end{cases}$$
$$x^2 + 3x = 4.$$

Решив это уравнение, получим

$$x_1 = -4, \; x_2 = 1.$$

Найдем соответствующие значения $y$, используя второе уравнение исходной системы:

$$3y^2 = x^2 + 11;$$
$$\text{если } x = -4, \text{ то } y = -3 \text{ или } y = 3;$$
$$\text{если } x = 1, \text{ то } y = -2 \text{ или } y = 2.$$

Ответ: (−4; 3), (−4; −3), (1; 2), (1; −2).

Таким образом, при решении системы двух уравнений с двумя переменными *способом сложения*:

1) умножают левые и правые части уравнений на некоторые числа;

2) складывают почленно левые и правые части уравнений;

3) решают получившееся при сложении уравнение с одной переменной;

4) находят соответствующие значения второй переменной.

Способ сложения применяется тогда, когда при почленном сложении левых и правых частей уравнений, после их умножения на некоторые числа, можно получить уравнение с одной переменной.

**443.** Решите систему:

а) $\begin{cases} y = -2x - 9, \\ x + 2y^2 = -3; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x + y = -1, \\ xy + 3x - 1 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 + y - 4 = 0, \\ x = 3y + 14; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 4y^2 - 4x = 3, \\ x - 3y = -2. \end{cases}$

**444.** Решите систему:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y = 0, \\ y + 2x = 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ x - y = -3; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - xy - y^2 = 19. \end{cases}$

**445.** В каких точках пересекаются:

а) парабола $y = x^2 - 6x + 5$ и прямая $y = 3x - 3$;

б) окружность $x^2 + y^2 = 25$ и прямая $x - y = -1$?

**446.** Найдите координаты общих точек:

а) прямой $2x - y = -3$ и параболы $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$;

б) прямой $2x + y = 3$ и окружности $x^2 + y^2 = 9$.

**447.** Решите систему:

а) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = y - 6, \\ 3x - 2y = 2; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = x - y, \\ 3x - 2y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5y + 2x = 4, \\ 3y^2 - 4x^2 - 6x = -6; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = x + y, \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$

**448.** Найдите решения системы:

а) $\begin{cases} (x + 5)(y + 2) = 12, \\ 3(x + 3) - 5y = -7; \end{cases}$
в) $\begin{cases} (2x - y)(2x + y) = 3, \\ 2y - 3(x + y) = -4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(2x - y) + x = 0, \\ 2(4x - 3y) + 3y = 9; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 2(x - y) + y = 5, \\ (2x - y)^2 = 5x + 15. \end{cases}$

**449.** Решите систему:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 4, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{4}{5}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{2}{y-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{x-2} = -\frac{3}{y}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{1}{y+1} = \frac{2}{x-1}, \\ \frac{4}{x+2} + \frac{1}{y-1} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

**450.** Найдите решения системы:

а) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 9, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 1, \\ 2x^2 - y^2 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 - y = -6, \\ 2x^2 - 3y^2 = -4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 16, \\ 3x^2 + xy - x = 18. \end{cases}$

**451.** Решите систему:

а) $\begin{cases} xy - 2x = -2, \\ y - xy = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2xy = -10, \\ y + xy = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x - y - 2xy = -4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x + y + 2xy = -6, \\ x + y + xy = -6. \end{cases}$

**452.** Найдите решения системы:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{16}, \\ 8xy = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2xy = -1, \\ x^2 - y^2 = \frac{3}{4}. \end{cases}$

## Упражнения для повторения

**453.** Постройте график уравнения:

а) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - 2 = 0$;

б) $y - 2x^2 - 4 = 0$;

в) $\frac{1}{3}xy + 4 = 0$;

г) $x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$.

**454.** Решите неравенство:
а) $3(1{,}5x - 6) + 2(0{,}25x + 1) \leqslant 3x - 1$;
б) $1{,}4m - 3(2m + 3) \geqslant 2 - 2(1{,}3m + 1)$.

**455.** При каких значениях $x$
а) двучлен $x^2 - 9$ принимает отрицательные значения;
б) двучлен $2 - x^2$ принимает положительные значения?

## 21. Другие способы решения систем уравнений с двумя переменными

Рассмотрим на примерах некоторые особые способы решения систем уравнений с двумя переменными.

Пример 1. Решим систему

$$\begin{cases} 9x^2 - y^2 - 3x + y = 0, \\ x^2 + y = xy. \end{cases}$$

Правая часть первого уравнения системы — число 0, а левая — многочлен второй степени. Попытаемся разложить его на линейные множители.

$$9x^2 - y^2 - 3x + y = (3x - y)(3x + y) - (3x - y) =$$
$$= (3x - y)(3x + y - 1).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} (3x - y)(3x + y - 1) = 0, \\ x^2 + y = xy. \end{cases} \qquad (1)$$

которая равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 3x - y = 0, \\ x^2 + y = xy \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ x^2 + y = xy. \end{cases}$$

Первая из них имеет два решения: (0; 0) и (1,5; 4,5), а вторая — одно решение: (0,5; −0,5). Объединение множеств решений этих систем является множеством решений системы (1), а значит, и исходной системы.

Ответ: (0; 0); (1,5; 4,5); (0,5; −0,5).

Пример 2. Решим систему

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ (x^2 + y^2)xy = 10. \end{cases} \qquad (2)$$

Левая часть второго уравнения является симметрическим выражением относительно переменных $x$ и $y$. Его можно выразить через сумму и произведение $x$ и $y$:

$$(x^2 + y^2)xy = ((x + y)^2 - 2xy)xy.$$

Подставив вместо суммы число 3, получим

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ (9 - 2xy)xy = 10. \end{cases}$$

Второе уравнение полученной системы представим в виде квадратного уравнения относительно $xy$:

$$2(xy)^2 - 9(xy) + 10 = 0.$$

Решив его, найдем, что

$$xy = 2 \text{ или } xy = \frac{5}{2}.$$

Значит, система (2) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Первая из них имеет два решения: (1; 2) и (2; 1). Вторая система решений не имеет.

Ответ: (1; 2), (2; 1).

Заметим, что данную систему можно решить, используя замену переменных $x + y = a$ и $xy = b$, где $x + y$ и $xy$ — основные симметрические многочлены. В этом случае система будет иметь вид $\begin{cases} a = 3, \\ (a^2 - 2b)b = 10. \end{cases}$ Вообще, если левые части обоих уравнений системы $\begin{cases} F(x; y) = 0, \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$ являются симметрическими многочленами от переменных $x$ и $y$, то эту систему удобно решать указанной выше заменой переменных. Напомним, что многочлены $x^2 + y^2$ и $x^3 + y^3$ выражаются через основные симметрические многочлены $x + y = a$ и $xy = b$ как $a^2 - 2b$ и $a^3 - 3ab$.

Пример 3. Решим систему

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 5y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy + 4y = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Левая часть первого уравнения системы — однородный многочлен, т. е. многочлен, все члены которого имеют одну и ту же степень.

Легко убедиться, что пара (0; 0) является решением системы. Рассмотрим теперь случай, когда $y \neq 0$. Разделив обе части первого уравнения на $y^2$, получим квадратное уравнение относительно $\frac{x}{y}$:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{y}\right) - 5 = 0.$$

Решив его, найдем, что $\frac{x}{y} = 1$ или $\frac{x}{y} = -5$. Отсюда

$$x = y \text{ или } x = -5y.$$

Таким образом, решение системы (3) можно свести к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 - 3xy + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -5y, \\ x^2 - 3xy + 4y = 0. \end{cases}$$

Первая из них имеет два решения: (0; 0) и (2; 2), вторая — также имеет два решения: (0; 0) и (0,5; −0,1). Условию $y \neq 0$ удовлетворяют две пары: (2; 2) и (0,5; −0,1). Однако ранее мы установили, что пара (0; 0) также является решением системы (3).

Ответ: (0; 0), (2; 2), (0,5; −0,1).

Заметим, что правой частью второго уравнения системы (3) также является число 0. Однако делением обеих его частей на $y^2$ (или $x^2$) не удалось бы его свести к квадратному уравнению относительно $\frac{x}{y}$, так как левая часть уравнения $x^2 - 3xy + 4y$ не однородный многочлен.

Рассмотренный в этом примере способ решения можно применять и в таких случаях, когда правые части отличны от нуля, а левые части обоих уравнений — однородные многочлены.

Пример 4. Решим систему

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - 2y^2 = -4, \\ 4x^2 + 3xy - y^2 = 6. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 3, а второго — на 2:

$$\begin{cases} 6x^2 + 3xy - 6y^2 = -12, \\ 8x^2 + 6xy - 2y^2 = 12. \end{cases}$$

Сложим почленно получившиеся уравнения:

$$14x^2 + 9xy - 8y^2 = 0.$$

В уравнении, полученном при сложении, правая часть 0, а левая — однородный многочлен. Пара (0; 0) удовлетворяет этому уравнению. Однако она не является решением системы. Разделим обе части уравнения на $x^2$, считая, что $x \neq 0$. Получим квадратное уравнение относительно $\frac{y}{x}$:

$$8\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{x}\right) - 14 = 0.$$

Решив его, найдем $\frac{y}{x} = 2$ или $\frac{y}{x} = -\frac{7}{8}$. Отсюда

$$y = 2x \text{ или } y = -\frac{7}{8}x.$$

Составим и решим две системы:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ 2x^2 + xy - 2y^2 = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{7}{8}x, \\ 2x^2 + xy - 2y^2 = -4. \end{cases}$$

Получим:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 2;\ x_2 = -1,\ y_2 = -2;$$
$$x_3 = -\frac{8}{13}\sqrt{26},\ y_3 = \frac{7}{13}\sqrt{26};\ x_4 = \frac{8}{13}\sqrt{26},\ y_4 = -\frac{7}{13}\sqrt{26}.$$

Ответ: (1; 2), (−1; −2);

$$\left(-\frac{8}{13}\sqrt{26}; \frac{7}{13}\sqrt{26}\right),\ \left(\frac{8}{13}\sqrt{26}; -\frac{7}{13}\sqrt{26}\right).$$

Пример 5. Решим систему

$$\begin{cases} x + y = 3xy, \\ x - y = 2xy. \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения системы, получим

$$2x = 5xy.$$

Отсюда

$$2x - 5xy = 0,$$
$$x = 0 \text{ или } 2 - 5y = 0.$$

Если $x = 0$, то $y = 0$; если $2 - 5y = 0$, т. е. $y = 0{,}4$, то $x = 2$.

Ответ: (0; 0); (2; 0,4).

**456.** Решите систему:

а) $\begin{cases} 7xy + 2x^2 - 4y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + y = -11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2 + 2xy - 3x - y = 0, \\ 2x^2 - y^2 + 2x + y = \frac{3}{2}. \end{cases}$

**457.** Найдите решения системы:

а) $\begin{cases} xy = -2, \\ (x - y)^2 + x + y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 32, \\ x + y = 2. \end{cases}$

**458.** Решите систему:

а) $\begin{cases} 2x^2 + 4xy - 5y = 1, \\ x^2 + xy - 6y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(3x - 2y) = y^2, \\ 3y^2 = 2x(x + 2) - 3. \end{cases}$

**459.** Найдите решения системы:

а) $\begin{cases} 2x^2 - xy = y^2 + 5, \\ x^2 - xy = y^2 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 2xy - 1, \\ 2x^2 - y^2 = 2xy - 1. \end{cases}$

**460.** Решите систему:

а) $\begin{cases} x + y = 5xy, \\ x - y = xy; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 5y = 6xy, \\ 5x - 5y = xy. \end{cases}$

**461.** Найдите решения системы:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = \dfrac{13}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x| + |y| = 6, \\ x^2 - y^2 = 24; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{17}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x| - |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$

**462.** Решите систему:

а) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy + 2x + y = 0, \\ x^2 - y = xy - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy = -\dfrac{1}{4}, \\ 3x^2 - x^2y = xy^2 - 3x^2y + 30. \end{cases}$

**463.** Найдите решения системы:

а) $\begin{cases} xy = 2, \\ (x^2 + y^2)xy = 24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = \sqrt{3}, \\ xy(x^2 + y^2) = -1. \end{cases}$

**464.** Решите систему:

а) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - y^2 = 0, \\ x^2 + 9xy - y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x^2 - 15xy + 10y^2 = 14, \\ 3x^2 - 9xy + 6y^2 = 7. \end{cases}$

## Упражнения для повторения

**465.** Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 3x - 12}$; б) $y = \sqrt{x^3 + x - 2}$.

**466.** Укажите нули функции $y = x^2 + |x| - 12$, область ее значений, промежутки возрастания и убывания.

## 22. Решение задач

Вам уже приходилось решать задачи с помощью уравнений с одной переменной и систем уравнений с двумя переменными. Рассмотрим примеры более сложных задач.

Задача 1. Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в 2 мин. Второй из них, пробежав 1 км, догнал первого и, продолжая бег, на расстоянии 5 км от места старта повернул обратно. На обратном пути он снова встретился с первым бегуном, причем эта встреча произошла через 20 мин после старта первого бегуна. С какой скоростью бежал каждый бегун?

Пусть скорость первого бегуна $x$ км/ч, а второго — $y$ км/ч. Расстояние в 1 км первый бегун пробежал за $\frac{1}{x}$ ч, а второй — за $\frac{1}{y}$ ч, что на 2 мин, т. е. на $\frac{1}{30}$ ч, меньше. Значит,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{30}.$$

К моменту следующей встречи первый бегун был в пути 20 мин, т. е. $\frac{1}{3}$ ч, и пробежал $\frac{1}{3}x$ км, а второй находился в пути 18 мин, т. е. $\frac{3}{10}$ ч, и пробежал $\frac{3}{10}y$ км, причем это расстояние равно $10 - \frac{1}{3}x$ км. Следовательно,

$$\frac{3}{10}y = 10 - \frac{1}{3}x.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{30}, \\ \frac{3}{10}y = 10 - \frac{1}{3}x, \end{cases}$$

найдем, что она имеет два решения: $x_1 = 12$, $y_1 = 20$ и $x_2 = 75$, $y_2 = -50$, из которых только первое соответствует смыслу задачи.

Ответ: скорость первого бегуна 12 км/ч, а второго — 20 км/ч.

Задача 2. Из сосуда, наполненного чистым спиртом, отлили 2 л спирта и долили 2 л воды. Затем отлили 2 л смеси и снова долили 2 л воды. Наконец, еще раз отлили 2 л получившейся смеси и долили 2 л воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 л больше объема оставшегося в нем спирта. Найдите вместимость сосуда.

Пусть вместимость сосуда равна $x$ л. После отливания 2 л спирта и доливания 2 л воды в нем осталось $(x - 2)$ л спирта и в каждом литре смеси оказалось $\frac{x-2}{x}$ л спирта. В результате второго отливания 2 л смеси и добавления 2 л воды в сосуде осталось $x - 2 - \frac{x-2}{x} \cdot 2$ л, т. е. $\frac{(x-2)^2}{x}$ л спирта, причем в каждом литре смеси оказалось $\frac{(x-2)^2}{x^2}$ л спирта. После третьего отливания осталось $\frac{(x-2)^2}{x} - \frac{(x-2)^2}{x^2} \cdot 2$ л, т. е. $\frac{(x-2)^3}{x^2}$ л спирта. При доливании сосуда водой оказалось, что в нем содержится $x - \frac{(x-2)^3}{x^2}$ л воды, что на 3 л больше объема оставшегося спирта. Значит,

$$x - \frac{(x-2)^3}{x^2} = \frac{(x-2)^3}{x^2} + 3.$$

Умножив обе части уравнения на $x^2$ и выполнив преобразования, получим уравнение

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0.$$

Решая его, найдем, что $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, причем ни один из этих корней не обращает в нуль $x^2$. Значит, составленное уравнение имеет два корня: 1 и 4, из которых условию задачи соответствует только второй корень.

Ответ: вместимость сосуда 4 л.

**467.** Один катет прямоугольного треугольника больше другого на 5 см. Найдите периметр этого треугольника, если его площадь равна 150 см$^2$.

**468.** Периметр прямоугольника равен 14 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух смежных сторонах, равна 25 см$^2$. Найдите стороны прямоугольника.

**469.** По двум взаимно перпендикулярным прямым движутся равномерно две точки. Сейчас они обе находятся в точке пересечения прямых, а через 10 с расстояние между ними будет 1 м. Найдите скорость каждой точки, если одна из них проходит за 3 с столько же, сколько проходит другая за 4 с.

**470.** Сумма радиусов двух кругов равна 14 см, а разность площадей этих кругов равна $28\pi$ см$^2$. Найдите радиусы кругов.

**471.** Сумма квадратов двух чисел равна 202, а разность квадратов равна 40. Найдите эти числа.

**472.** (Задача Фибоначчи, XIII в.) Две башни в равнине находятся на расстоянии 60 локтей одна от другой. Высота одной — 50 локтей, другой — 40 локтей. Между башнями находится колодец, одинаково удаленный от вершин обеих башен. Спрашивается, как далеко находится колодец от основания каждой башни?

**473.** Диагональ прямоугольника равна 10 см. Если меньшую сторону прямоугольника увеличить на 2 см, а большую — уменьшить на 2 см, то диагональ не изменится. Найдите стороны прямоугольника.

**474.** (Задача Бхаскары, XII в.) Цветок лотоса возвышался над поверхностью пруда на 4 фута. Под напором ветра он скрылся под водой на расстоянии 16 футов от того места, где он раньше поднимался над водой. Какой глубины был пруд?

**475.** Расстояние между двумя пристанями 60 км. Теплоход проходит это расстояние по течению и против течения за 5,5 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде и скорость течения, если одна из них больше другой на 20 км/ч.

**476.** Катер шел 2 ч против течения и 3 ч по течению. За это время он прошел 88 км. Найдите скорость течения и скорость катера в стоячей воде, если по течению он прошел на 32 км больше, чем против течения.

**477.** Перейдя ручей, турист уменьшил скорость на 1 км/ч. На весь путь длиной 38 км он затратил 7 ч. Путь до ручья он прошел на 1 ч быстрее, чем остаток пути. Сколько километров шел турист до ручья и с какой скоростью?

**478.** Фермер отправился на машине в город, находящийся на расстоянии 110 км от фермы. Через 20 мин из города на ферму выехал его сын, который проезжал в час на 5 км больше. Встреча произошла в 50 км от города. С какой скоростью ехал фермер?

**479.** От пристани отправляется первый катер. Через 1 ч вслед за ним отправляется второй катер и догоняет его в 30 км от пристани. Если бы с момента отправления второго катера первый катер увеличил скорость на 10 км/ч, то второй догнал бы его в 90 км от пристани. Найдите скорость каждого катера.

**480.** Артель выполнила работу за 20 дней. Если бы в артели было на 4 человека больше и рабочий день увеличился бы на 1 ч, то работа была бы выполнена за 10 дней. Если бы в артели было на 1 человека меньше, а рабочий день сократился на 1 ч, то для выполнения работы потребовалось бы 30 дней. Сколько человек было в артели и какой продолжительности был у них рабочий день?

**481.** Благодаря применению в фермерском хозяйстве новых технологий урожайность гречихи возросла на 4 ц с 1 га. В результате было собрано не 147 ц, как в прошлом году, а на 3 ц больше, хотя под гречиху отвели на 1 га меньше. Какова была урожайность гречихи с 1 га в прошлом и текущем годах и какая площадь была отведена в эти годы в фермерском хозяйстве под гречиху?

**482.** (Задача Диофанта, III в.) Найдите два числа, отношение которых равно 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5.

**483.** На двух смежных сторонах прямоугольника построены квадраты. Площадь одного из них на 24 см$^2$ больше площади другого. Найдите длину и ширину прямоугольника, если его площадь равна 35 см$^2$.

**484.** Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а площадь равна 24 см$^2$. Найдите стороны треугольника.

**485.** (Задача Безу, XVIII в.) Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 пистоля. При этом он потерял столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он ее купил?

**486.** Положив в банк 2000 р., вкладчик получил через два года 2420 р. Какой процент начислял банк ежегодно?

**487.** Вкладчик положил деньги в банк и получил через год 2220 р. Если бы вклад был на 200 р. больше, а банк выплачивал на 1% меньше, то вкладчик получил бы 2420 р. Какова была сумма вклада и какой процент выплачивал банк ежегодно?

**488.** Фирма в течение двух лет ежегодно увеличивала количество выпускаемых приборов на одно и то же число процентов. В результате за два года количество выпускаемых приборов удвоилось. Сколько процентов составлял ежегодный прирост числа выпускаемых приборов?

**489.** Бассейн наполнится, если первую трубу открыть на 12 мин, а вторую — на 7 мин. Если же обе трубы открыть на 6 мин, то наполнится $\frac{2}{3}$ бассейна. За сколько минут наполнится бассейн, если открыть только вторую трубу?

**490.** Если открыть два крана, то пустой бассейн наполнится за 6 ч. Чтобы наполнить пустой бассейн с помощью второго крана, понадобится на 5 ч больше, чем с помощью первого. За сколько часов можно наполнить бассейн с помощью каждого крана в отдельности?

**491.** Один каменщик может выложить стену на 6 ч быстрее, чем другой. При совместной работе они за 2 ч выложат половину стены. За сколько часов каждый из них может выложить стену?

**492.** Двое рабочих могут выполнить задание за 12 дней. Если сначала один из них сделает половину всей работы, а потом остальное сделает другой, то им потребуется 25 дней. За сколько дней каждый рабочий, работая один, может выполнить задание?

**493.** Бассейн, объем которого 425 м$^3$, можно наполнить за 17 ч, если одновременно открыть два крана. Однако наполняли бассейн так, что первый кран был открыт на 5 ч дольше, чем второй. Если первый кран открыть на столько часов, сколько был открыт второй, а второй — на столько, сколько был открыт первый, то через первый кран поступит вдвое меньше воды, чем через второй. Сколько времени был открыт второй кран?

**494.** Расстояние в 360 км легковой автомобиль прошел на 2 ч быстрее, чем грузовой. Если скорость каждого автомобиля увеличить на 30 км/ч, то грузовой затратит на весь путь на 1 ч больше, чем легковой. Найдите скорость каждого автомобиля.

**495.** Одновременно из пункта $A$ выехали две машины со скоростями 80 км/ч и 100 км/ч в одном и том же направлении. Через час в том же направлении из того же пункта выехала третья машина, которая догнала вторую машину через 3 ч после того, как догнала первую. Найдите скорость третьей машины.

**496.** От пристани в одно и то же время отчалили плот и катер. Пройдя 90 км, катер повернул обратно и через $12\frac{1}{2}$ ч с момента отправления подошел к той же пристани. На обратном пути он встретил плот в 30 км от пристани. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения.

**497.** Из бутыли, наполненной доверху глицерином, отлили 8 л. Затем долили бутыль водой и отлили 6 л смеси. После этого вновь долили бутыль водой. Определите вместимость бутыли, если известно, что в результате получили смесь, содержащую 68% глицерина.

**498.** Из двух жидкостей, плотность которых соответственно равна 1,2 г/см$^3$ и 1,6 г/см$^3$, составили смесь массой 60 г. Сколько граммов каждой жидкости было взято, если известно, что масса 8 см$^3$ смеси равна всей массе менее тяжелой из смешанных жидкостей?

**499.** Из сосуда, вмещающего 40 л и наполненного спиртом, отлили некоторое количество спирта и долили сосуд водой; потом отлили такое же количество смеси. Тогда в сосуде осталось 22,5 л чистого спирта. Сколько литров жидкости отливали каждый раз?

**500.** Сосуд вместимостью 20 л наполнен спиртом. Из него отлили некоторое количество спирта в другой сосуд, вместимость которого также равна 20 л. Наполнив оставшуюся часть второго сосуда водой, дополнили этой смесью первый сосуд. Далее из первого сосуда перелили $6\frac{2}{3}$ л во второй. В результате оказалось, что оба сосуда содержат одинаковое количество спирта. Сколько литров спирта отлили в первый раз?

**501.** Из сосуда, наполненного глицерином, отлили 1 л глицерина, а взамен долили 1 л воды. Затем отлили 1 л смеси и вновь долили 1 л воды. Наконец, еще раз отлили 1 л смеси и долили 1 л воды. В результате этих операций объем воды в сосуде оказалось в семь раз больше объема оставшегося глицерина. Сколько жидкости вмещает сосуд?

**502.** Положив в банк некоторую сумму, вкладчик получил через год 420 р. прибыли. Однако он не стал забирать деньги из банка и, добавив к ним 580 р., оставил вклад еще на год. В результате спустя год он получил в банке 4560 р. Какая сумма была положена в банк первоначально и какой процент прибыли в год давал банк?

**503.** Сумма квадратов чисел единиц в крайних разрядах трехзначного числа равна 25. Разность квадратов чисел единиц в среднем и последнем разрядах равна квадрату числа единиц первого разряда. Если из искомого числа вычесть 99, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите трехзначное число.

**504.** Трое рабочих должны были выполнить некоторую работу. Если бы третий проработал 12 ч, то для окончания работы первому потребовалось бы 30 ч, а второму — 45 ч. Производительность третьего рабочего равна среднему арифметическому производительности двух остальных рабочих. За сколько часов может выполнить всю работу каждый рабочий?

## Упражнения для повторения

**505.** Решите систему:

а) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 6, \\ 3x^2 + xy - x = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 + y = 5. \end{cases}$

**506.** Постройте график уравнения:

а) $3x - 2y = 6$; в) $(-3x + y)(2x^2 - 3y) = 0$;

б) $(y - 3)^2 + (x - 2)^2 = 9$; г) $\left|y - \frac{1}{2}x\right|\left|2y - \frac{1}{2}x^2\right| = 0$.

**507.** Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3\left(\frac{1}{3}x - 1\right) \leqslant -\frac{1}{2}(2x + 1), \\ 2x - 3 \geqslant x + 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2x \geqslant 1, \\ -x^2 + 6x \leqslant 9. \end{cases}$

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Что называют решением уравнения с двумя переменными? Приведите пример.

**2.** Что такое график уравнения с двумя переменными?

**3.** Как узнать степень уравнения с двумя переменными? Приведите примеры.

**4.** Что является графиком уравнения первой степени с двумя переменными?

**5.** Что называют решением системы уравнений с двумя переменными?

**6.** Разъясните графический смысл решения системы двух уравнений с двумя переменными.

**7.** В чем состоит решение системы двух уравнений с двумя переменными способом подстановки?

**8.** В чем состоит решение системы двух уравнений с двумя переменными способом сложения?

# § 9. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

## 23. Линейное неравенство с двумя переменными

Подставим в неравенство с двумя переменными

$$0{,}5x^2 - 2y + 1 < 0$$

вместо $x$ число 1, а вместо $y$ — число 2. Получим верное неравенство $0{,}5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2 + 1 < 0$. Пару чисел (1; 2), в которой на первом месте — значение $x$, а на втором — значение $y$, называют решением неравенства $0{,}5x^2 - 2y + 1 < 0$.

О п р е д е л е н и е. **Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая его в верное неравенство.**

Заметим, что пара (2; 1) не является решением неравенства $0{,}5x^2 - 2y + 1 < 0$, так как при подстановке в него вместо $x$ числа 2, а вместо $y$ — числа 1 получается неверное неравенство $0{,}5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1 + 1 < 0$.

Если каждое решение неравенства с двумя переменными изобразить точкой в координатной плоскости, то получится *график* этого неравенства. Он является некоторой фигурой. Говорят, что эта фигура задается или описывается неравенством.

В связи с графиком представляют интерес две задачи: выяснить, что является графиком неравенства с двумя переменными, и найти неравенство, графиком которого является данная фигура.

Сначала рассмотрим линейные неравенства с двумя переменными.

Определение. **Линейным неравенством с двумя переменными называется неравенство вида $ax + by < c$ или $ax + by > c$, где $x$ и $y$ — переменные, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа.**

Если в линейном неравенстве с двумя переменными знак неравенства заменить знаком равенства, то получится линейное уравнение. Графиком линейного уравнения $ax + by = c$, в котором $a$ или $b$ не равно нулю, является прямая линия. Она разбивает множество не принадлежащих ей точек координатной плоскости на две области, представляющие собой открытые полуплоскости. Покажем, что одна из них является графиком неравенства $ax + by < c$, а другая — графиком неравенства $ax + by > c$.

Если $b \neq 0$, то уравнение $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ равносильно уравнению $ax + by = c$, графиком которого является прямая, непараллельная оси $y$ (рис. 65, 66). Штриховая линия показывает, что точки изображаемой ею прямой не принадлежат графику неравенства.

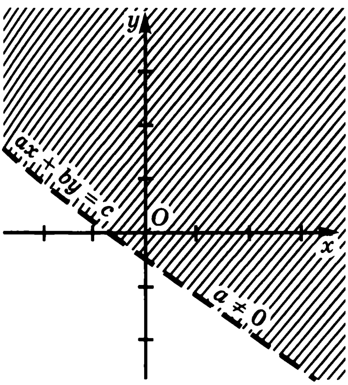



Рис. 65

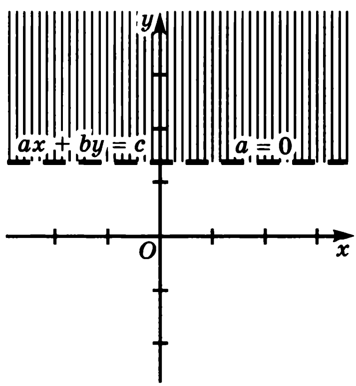



Рис. 66

Линейное неравенство $ax + by < c$ при $b < 0$ равносильно неравенству $y > -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Отметим на прямой $ax + by = c$ произвольную точку $A$. Если координаты этой точки $\alpha$ и $\beta$, то верно равенство

$$\beta = -\frac{a}{b}\alpha + \frac{c}{b}.$$

Проведем через точку $A$ прямую, перпендикулярную оси $x$. Любая точка этой прямой имеет абсциссу $\alpha$. Если точка лежит в верхней полуплоскости (выше прямой $ax + by = c$), то ее ордината $\gamma$ больше $\beta$. Тогда пара $(\alpha; \gamma)$ является решением неравенства $y > -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Если точка лежит в нижней полуплоскости (ниже прямой $ax + by = c$), то ее ордината $\gamma$ меньше $\beta$. При этом пара $(\alpha; \gamma)$ не является решением неравенства.

Значит, верхняя полуплоскость является графиком неравенства $y > -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ и равносильного ему неравенства $ax + by < c$ при $b < 0$.

Таким же образом можно доказать, что графиком неравенства $ax + by < c$ при $b > 0$ является нижняя полуплоскость.

Графиком неравенства $ax + by > c$ также является одна из полуплоскостей в зависимости от знака $b$.

Если $b = 0$ и $a \neq 0$, то графиком уравнения $ax + by = c$ является прямая, параллельная оси $y$ (рис. 67). В этом случае получаются правая и левая открытые полуплоскости. Одна из них является графиком неравенства $ax + by < c$, а другая — графиком неравенства $ax + by > c$.

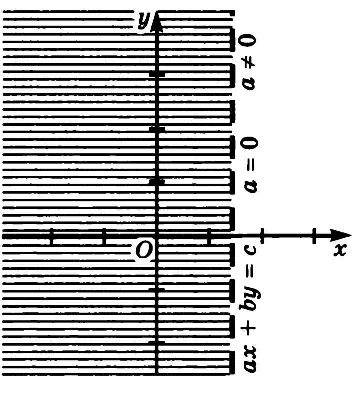



Рис. 67

Если $a = 0$ и $b = 0$, то при $c > 0$ графиком неравенства $ax + by < c$ является вся координатная плоскость, а при $c < 0$ — пустое множество. Графиком неравенства $ax + by > c$ в этом случае также является координатная плоскость или пустое множество.

Если $a = 0$, $b = 0$ и $c = 0$, то графиком неравенства $ax + by < c$ и неравенства $ax + by > c$ является пустое множество.

Пример 1. Покажем штриховкой на координатной плоскости график неравенства $2x + 3y < 6$.

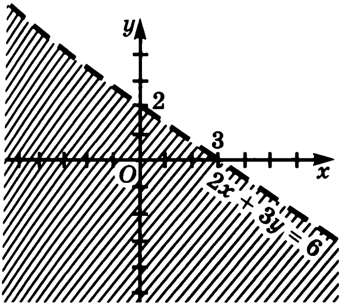



Рис. 68

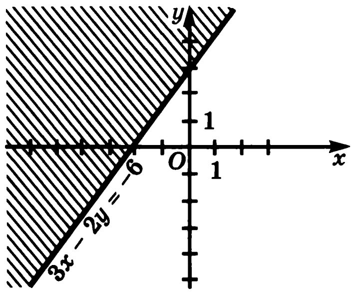



Рис. 69

Начертим график уравнения $2x + 3y = 6$ (рис. 68). Пара (0; 0) является решением неравенства $2x + 3y < 6$, так как неравенство $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 6$ верно. Точка (0; 0) принадлежит нижней полуплоскости. Значит, графиком неравенства $2x + 3y < 6$ является нижняя полуплоскость.

Пример 2. Изобразим в координатной плоскости множество решений неравенства $2x - 3y \leqslant -6$.

Начертим график уравнения $2x - 3y = -6$ (рис. 69). Отметим в какой-нибудь полуплоскости точку, например, точку (1; 1). Пара (1; 1) не является решением неравенства $2x - 3y \leqslant -6$. Точка с координатами (1; 1) лежит в нижней полуплоскости. Значит, графиком неравенства является верхняя полуплоскость вместе с прямой $2x - 3y = -6$.

Пример 3. Составим неравенство, задающее верхнюю открытую полуплоскость, граница которой проходит через точки (−2; 0) и (0; 2).

Напишем уравнение прямой, проходящей через точки (−2; 0) и (0; 2). Это уравнение может иметь вид $y = ax + b$. Используя координаты заданных точек, получим $b = 2$ и $a = 1$. Значит, граница полуплоскости описывается уравнением $y = x + 2$. Оно равносильно уравнению с двумя переменными

$$y - x = 2.$$

Заменим в этом уравнении знак равенства одним из знаков $<$ или $>$ так, чтобы пара (0; 0) была решением получившегося неравенства, так как точка (0; 0) принадлежит верхней полуплоскости. Получим

$$y - x < 2.$$

**508.** Являются ли пары чисел (2; −9), (−1; 30) и (15; 6) решениями неравенства:

а) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - 1 > 0$; б) $-10x - y \geqslant -11$?

**509.** Графиком неравенства $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y < 1$ является открытая полуплоскость. Пересекает ли ее границу отрезок с концами:

а) $A(2; 3)$ и $B(-1; 1)$;

б) $A(3; 1)$ и $B(-4; -10)$;

в) $A(-5; 4)$ и $B(6; 4)$;

г) $A(2; 0)$ и $B(-2; -6)$?

**510.** Изобразите график неравенства:

а) $4x - 5y > 20$;

б) $3x + 4y < 12$;

в) $2x - y < -3$;

г) $2x + 3y > -5$.

**511.** Какое множество точек описывается неравенством:

а) $\frac{1}{2}(2x + 3y) > \frac{1}{3}(3x - 2y) + 2$;

б) $-5(x - 2y) - 10y - 8x < 3$?

**512.** Изобразите в координатной плоскости множество точек, которое задает неравенство:

а) $y > -\frac{1}{2}x$; в) $x < -\frac{2}{3}y$; д) $y \geqslant -2$;

б) $y \leqslant \frac{1}{3}x$; г) $x \geqslant \frac{3}{4}y$; е) $x \leqslant 5$.

**513.** Напишите линейное неравенство с двумя переменными, графиком которого является верхняя открытая полуплоскость, если ее граница проходит через точки:

а) $(0; -3)$ и $(-2; 0)$; в) $(-2; 5)$ и $(3; 5)$;

б) $(1; 2)$ и $(-2; -1)$; г) $(-7; 0)$ и $(4; 0)$.

**514.** Составьте линейное неравенство, графиком которого является левая открытая полуплоскость, если ее границе принадлежат точки:

а) $(7; -1)$ и $(7; 4)$; б) $(-5; 2)$ и $(-5; -5)$.

**515.** Начертите прямую $2x - 5y = 0$. Определите знак выражения $2x - 5y - 10$ в каждой из образовавшихся открытых полуплоскостей.

**516.** Постройте прямую $-4x + 2y = -8$. В какой из образовавшихся открытых полуплоскостей выражение $-4x + 2y - 8$ принимает:

а) положительное значение;

б) отрицательное значение?

### Упражнения для повторения

**517.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 4, \\ x^2 + 3y^2 - 5x = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - y - 2 = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4. \end{cases}$

**518.** Разность площадей квадратов, построенных на смежных сторонах прямоугольника, равна 20 см$^2$. Периметр прямоугольника равен 20 см. Найдите длину и ширину прямоугольника.

## 24. Неравенство с двумя переменными степени выше первой

Примером неравенства с двумя переменными, степень которого выше первой, может служить неравенство

$$x^2y^2 + xy^3 - 3x^2y + 5x > 2y^3 + 3y - 7.$$

Некоторые из таких неравенств можно привести к виду $y > f(x)$ или $y < f(x)$, где $f(x)$ — многочлен степени выше первой. Поэтому $f$ является функцией от $x$ с областью определения $(-\infty; +\infty)$.

Неравенствам $y > f(x)$ и $y < f(x)$ соответствует уравнение $y = f(x)$, график которого делит множество не принадлежащих ему точек плоскости на две области: верхнюю и нижнюю. Верхняя область является графиком неравенства $y > f(x)$, а нижняя — графиком неравенства $y < f(x)$.

Предположим, что на рисунке 70 штриховой линией показан график уравнения $y = f(x)$. Отметим на этой линии произвольную точку $A$ и проведем через нее перпендикуляр к оси $x$. Координаты точки $A$ удовлетворяют уравнению $y = f(x)$. Координаты любой точки перпендикуляра, лежащей выше точки $A$, удовлетворяют неравенству $y > f(x)$, так как ее ордината больше ординаты точки $A$. Если точка перпендикуляра лежит ниже точки $A$, то ее координаты удовлетворяют неравенству $y < f(x)$. На рисунке штриховкой показан график неравенства $y < f(x)$.

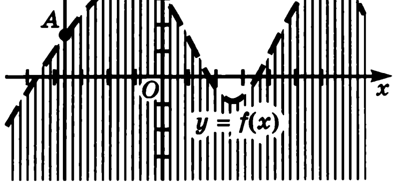


Рис. 70

Пример 1. Покажем штриховкой на координатной плоскости график неравенства

$$y < -\frac{1}{4}x^2 + 4.$$

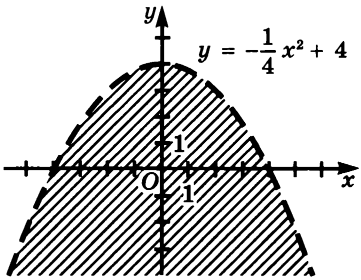



Рис. 71

Построим график уравнения $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ (рис. 71). Нижняя из образовавшихся областей является графиком неравенства $y < -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

Перейдем к неравенствам вида

$$P(x;\ y) < 0 \text{ и } P(x;\ y) > 0,$$

где $P(x;\ y)$ — многочлен с двумя переменными второй или более высокой степени. Каждому из этих неравенств соответствует уравнение $P(x;\ y) = 0$. График этого уравнения разбивает множества не принадлежащих ему точек координатной плоскости на две или более областей.

Так, например, построив график уравнения $xy - 12 = 0$ (рис. 72), мы получим три области. И в этом случае координаты каждой точки области удовлетворяют лишь одному из неравенств $xy - 12 < 0$ или $xy - 12 > 0$. Докажем это для III области.

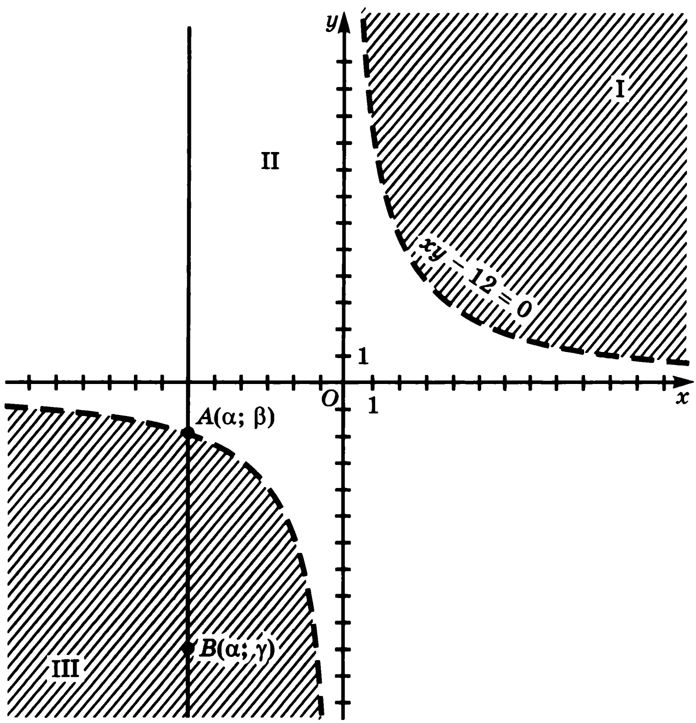



Рис. 72

Возьмем на границе III области произвольную точку $A$ и обозначим ее координаты $\alpha$ и $\beta$. Так как эта точка принадлежит графику уравнения $xy - 12 = 0$, то верны равенства $\alpha\beta - 12 = 0$ и $\alpha\beta = 12$. Проведем через точку $A$ перпендикуляр к оси $x$ и отметим на этом перпендикуляре в III области точку $B$. Ее абсцисса равна $\alpha$, а ординату обозначим буквой $\gamma$. Так как $\gamma$ и $\beta$ — отрицательные числа и $\gamma < \beta$, то $|\gamma| > |\beta|$. Отсюда получаем, что $|\alpha||\gamma| > |\alpha||\beta|$. Но так как и $\alpha < 0$, то $|\alpha||\gamma| = \alpha\gamma$ и $|\alpha||\beta| = \alpha\beta$ и $\alpha\gamma > \alpha\beta = 12$. Значит, координаты точки $B$ удовлетворяют неравенству $xy - 12 > 0$.

Так же можно доказать, что координаты любой точки II области удовлетворяют неравенству $xy - 12 < 0$, а I области — неравенству $xy - 12 > 0$.

Рассмотрим еще одно неравенство $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$, которое можно привести к виду $P(x; y) < 0$, где $P(x; y)$ — многочлен. Графиком уравнения $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ является эллипс, так как этот график можно получить из окружности $x^2 + y^2 = 1$ растяжением в 2 раза от оси $x$ и в 3 раза от оси $y$. Чтобы понять это, достаточно уравнение $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ представить в виде

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Построим график уравнения $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Он разбивает множество не принадлежащих ему точек координатной плоскости на две области: внутреннюю и внешнюю (рис. 73). Докажем, что координаты каждой точки внутренней области удовлетворяют неравенству $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$.

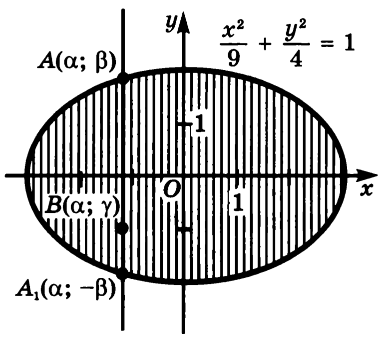


Рис. 73

Отметим на эллипсе произвольную точку $A$. Пусть ее координаты равны $\alpha$ и $\beta$. Проведем через $A$ перпендикуляр к оси $x$. Он пересечет эллипс в точке $A_1(\alpha; -\beta)$, так как точка $A_1$ симметрична $A$ относительно оси $x$. Отметим на перпендикуляре точку $B$, расположенную во внутренней области. Ее абсцисса равна $\alpha$. Обозначим ординату точки $B$ буквой $\gamma$. Так как точка $B$ расположена ближе к оси $x$, чем точки $A$ и $A_1$, то $|\gamma| < |\beta|$. Отсюда $|\gamma|^2 > |\beta|^2$. Далее имеем $|\gamma^2| < |\beta^2|$. Используя равенства $|\gamma^2| = \gamma^2$ и $|\beta^2| = \beta^2$, получаем $\gamma^2 < \beta^2$ и $\frac{\alpha^2}{9} + \frac{\gamma^2}{4} < 1$. Это означает, что координаты точки $B$ удовлетворяют неравенству $\frac{\alpha^2}{9} + \frac{\gamma^2}{4} < 1$. Таким образом, внутренняя область является графиком неравенства $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$. Так же можно убедиться в том, что внешняя область является графиком неравенства $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1$.

**519.** Являются ли пары чисел (1; 1), (−3; −2) и (4; 3) решениями неравенства:

а) $\frac{2}{3}x^2 + y^2 - 2 < 0$; б) $3xy - 2x - y > 0$?

**520.** Изобразите график неравенства:

а) $2xy \leqslant 11$; в) $\frac{1}{2}x^2 - 3x - y + 2\frac{1}{2} < 0$;

б) $x^2 + y^2 > 9$; г) $-y^2 + 2y + x + 2 \geqslant 0$.

**521.** Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых являются решениями неравенства:

а) $x^3 - y + 1 < 0$; б) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) \geqslant y + 5$.

**522.** Изобразите в координатной плоскости множество точек, которое можно задать неравенством:

а) $x^2 + y^2 \geqslant 10$; в) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 25$;

б) $x^2 < 16 - y^2$; г) $(2 - x)^2 + (1 - y)^2 > 5$.

**523.** Какое множество точек задается неравенством:

а) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 10$;

б) $x^2 - 6x + y^2 + 2y + 13 > 0$;

в) $x^2 + y^2 - 4x - 8y \geqslant 0$;

г) $x^2 + 2x + y^2 + 10y + 22 \geqslant 0$?

**524.** На сколько областей разбивает график уравнения $xy - y + 1 = 0$ множество не принадлежащих ему точек координатной плоскости? Определите знак выражения $xy - y + 1$ в каждой из этих областей.

**525.** Графиком неравенства $x^2 - xy + y^2 < 5$ является некоторая область с границей $L$. Пересекает ли линию $L$ отрезок, концами которого служат точки (4; 1) и (−1; 1)?

**526.** Напишите неравенство, графиком которого является:
а) внутренняя область круга с центром (2; 2) и радиусом, равным 2 единицам;
б) внешняя область круга с центром (−3; 4) и радиусом, равным 6 единицам.

**527.** Опишите неравенством множество точек, лежащих выше параболы, проходящей через точки (2; −1), (−1; 5) и (1; −3). Ось симметрии параболы параллельна оси $y$.

### Упражнения для повторения

**528.** Решите систему уравнений:
а) $\begin{cases} x^2 - xy + 6y^2 = 0, \\ 20 - 2xy + y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2 + xy = 1, \\ 5xy + y^2 = -6. \end{cases}$

**529.** Решите неравенство:
а) $2x^2 + x + 1 < x^2 - 4x - 6$; б) $3x^2 - 2x + 2 > 2x^2 + 3x - 4$.

## 25. Система неравенств с двумя переменными

Рассмотрим систему двух неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 9, \\ x - y > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Пара чисел (1; 0) является решением как первого, так и второго неравенства, т. е. является общим решением неравенств системы. Такую пару чисел называют *решением системы неравенств с двумя переменными*. Множество общих решений неравенств есть множество решений системы. Иными словами, множество решений системы есть пересечение множеств решений неравенств, составляющих систему.

График первого неравенства системы (1) есть внутренняя область круга с центром в начале координат и радиусом, равным 3. Она показана на рисунке 74 горизонтальной штриховкой. Графиком второго неравенства является открытая полуплоскость $x - y > 0$, показанная на том же рисунке наклонной штриховкой. Множество

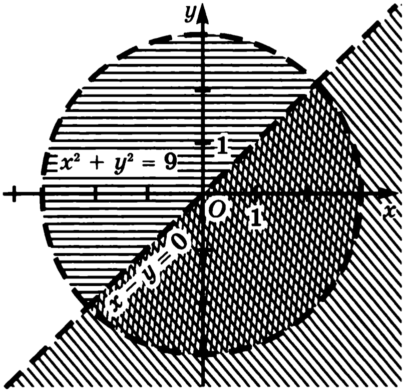



Рис. 74

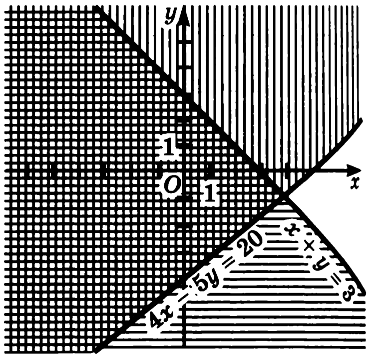



Рис. 75

решений системы изображено двойной штриховкой. Оно составляет открытый полукруг.

Далее остановимся более подробно на решении систем двух линейных неравенств с двумя переменными. При этом могут представиться различные случаи. Некоторые из них будут рассмотрены на примерах.

Пример 1. Изобразим на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} x + y \leqslant 3, \\ 4x - 5y \leqslant 20. \end{cases} \qquad (2)$$

Множество решений первого неравенства показано на рисунке 75 горизонтальной штриховкой, а множество решений второго неравенства — вертикальной штриховкой. Множество решений системы изображено двойной штриховкой. Значит, система (2) задает на координатной плоскости угол.

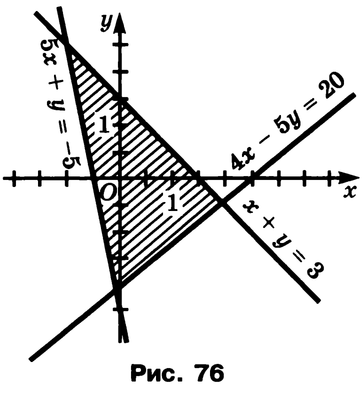



Рис. 76

Если к системе (2) добавить еще одно неравенство

$$5x + y \geqslant -5,$$

то получится система трех неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 3, \\ 4x - 5y \leqslant 20, \\ 5x + y \geqslant -5. \end{cases}$$

Этой системой задается треугольник, показанный на рисунке 76.

Пример 2. Изобразим на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} x - 2y \leqslant 4, \\ 0{,}5x - y \geqslant -2. \end{cases} \qquad (3)$$

Решим уравнения $x - 2y = 4$ и $0{,}5x - y = -2$ относительно $y$. Получим

$$y = 0{,}5x - 2 \text{ и } y = 0{,}5x + 2.$$

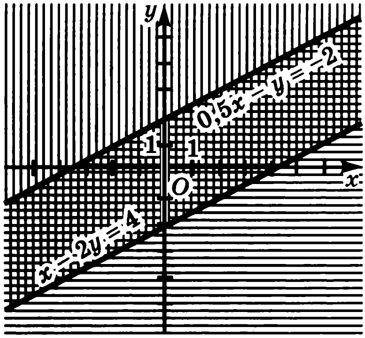



Рис. 77

Прямые, являющиеся графиками этих уравнений, пересекают ось $y$ в точках с координатами 2 и $-2$. Эти прямые параллельны, так как их угловые коэффициенты равны (рис. 77). График первого неравенства системы — верхняя полуплоскость, а график второго неравенства — нижняя полуплоскость. Их пересечением является полоса, показанная на рисунке двойной штриховкой.

Если поменять знаки неравенств системы (3), то получится новая система

$$\begin{cases} x - 2y \geqslant 4, \\ 0{,}5x - y \leqslant -2. \end{cases}$$

Графиком первого неравенства будет нижняя полуплоскость, а графиком второго неравенства — верхняя полуплоскость. Эти графики не имеют ни одной общей точки. Их пересечение пусто. Значит, множеством решений системы является пустое множество.

В наиболее типичных случаях графиком линейного неравенства с двумя переменными служит открытая полуплоскость или полуплоскость. Система таких неравенств описывает пересечение нескольких полуплоскостей. Оно может быть полуплоскостью, углом, полосой, многоугольником и др. Так, например, система неравенств

$$\begin{cases} x + y \leqslant 3, \\ x - y \geqslant -3, \\ x + y \geqslant -3, \\ x - y \leqslant 3 \end{cases}$$

описывает квадрат (рис. 78), диагонали которого лежат на осях координат.

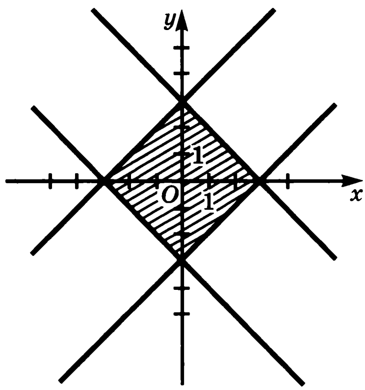



Рис. 78

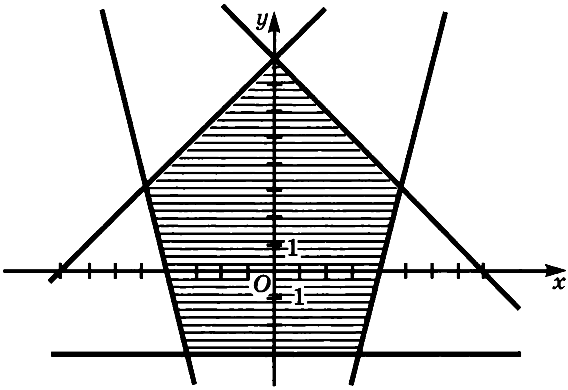



Рис. 79

Система пяти неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} x + y \leqslant 8, \\ x - y \geqslant -8, \\ 2x + y \geqslant -8, \\ 2x - y \leqslant 8, \\ y \geqslant -3 \end{cases}$$

описывает пятиугольник (рис. 79).

Теперь перейдем к примерам систем неравенств, содержащих неравенства второй или более высокой степени.

Пример 3. Изобразим на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4, \\ x^2 + y^2 - 6x \leqslant 0. \end{cases}$$

Преобразуем второе неравенство системы:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 \leqslant 9,$$
$$(x - 3)^2 + y^2 \leqslant 9.$$

Получим равносильную систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4, \\ (x - 3)^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Графиком первого неравенства является внешняя область круга с его границей $x^2 + y^2 = 4$. На рисунке 80 она показана горизонтальной штриховкой.

Вторую неравенству соответствует уравнение $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. Его график получается из графика уравнения $x^2 + y^2 = 9$ перемещением вправо на 3 единицы. Графиком второго неравенства является

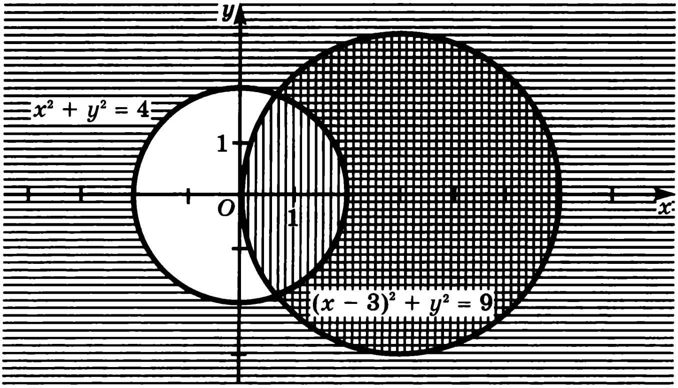



**Рис. 80**

внутренняя область и граница круга с центром в точке (3; 0) и радиусом, равным 3 единицам. На рисунке он показан вертикальной штриховкой. Пересечение графиков первого и второго неравенств показано двойной штриховкой. Оно изображает множество решений системы.

Пример 4. Найдем множество точек координатной плоскости, которое задано системой

$$\begin{cases} x^2 - y \leqslant 2, \\ y^2 - x \leqslant 2. \end{cases} \qquad (4)$$

Начертим графики уравнений $x^2 - y = 2$ и $y^2 - x = 2$ (рис. 81). График первого неравенства состоит из точек параболы $x^2 - y = 2$

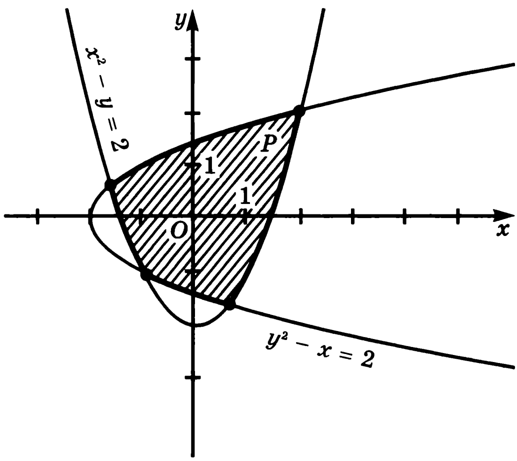



**Рис. 81**

и области, расположенной выше этой параболы. График второго неравенства состоит из точек параболы $y^2 - x = 2$, осью симметрии которой является ось $x$, и области, расположенной правее этой параболы. На рисунке штриховкой показано пересечение графиков неравенств. Это пересечение $P$ и задается системой (4).

**530.** Являются ли пары (2; −3) и (−3; 2) решениями системы:

а) $\begin{cases} 7x - 4y > 5, \\ -3x + 5y < 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + x^2 \leqslant -2, \\ x^2 - 2y > 1? \end{cases}$

**531.** Покажите штриховкой на координатной плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} 2y + x \geqslant -4, \\ y + 0{,}5x \leqslant 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x + y < -1, \\ x - y > 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 3y > -3, \\ -\frac{1}{3}x + y < 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - 2y < 3, \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x < 1. \end{cases}$

**532.** Изобразите на координатной плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y \leqslant 4, \\ x \geqslant 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \leqslant -2, \\ 3x - 2y \leqslant 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 5, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y \geqslant -1, \\ -2x - y \geqslant 2. \end{cases}$

**533.** Задайте системой неравенств

а) каждую координатную четверть;

б) каждый координатный угол.

**534.** При каких значениях $a$ и $c$ системой неравенств

$$\begin{cases} 2x - y \leqslant 3c, \\ ax + 3y \leqslant 4 \end{cases}$$

можно задать:

а) полосу; в) пустое множество;

б) угол; г) прямую?

**535.** Постройте треугольник, заданный системой неравенств

$$\begin{cases} -3x + 2y \leqslant 5, \\ 2x + y \leqslant 6, \\ y \geqslant -3. \end{cases}$$

**536.** Начертите четырехугольник, заданный системой

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - 3 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}x + 4, \\ -\frac{1}{3}x - 1 \leqslant y \leqslant -\frac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$

**537.** Найдите площадь прямоугольника, заданного системой

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 5, \\ -2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

**538.** Докажите, что четырехугольник, заданный системой

$$\begin{cases} 0 \leqslant x - y \leqslant 4, \\ -4 \leqslant x + y \leqslant 4, \end{cases}$$

является прямоугольником.

**539.** Одна прямая проходит через точки (4; 7) и (−2; 4), а другая — через точки (8; 0) и (−6; −7). Докажите, что эти прямые являются границами некоторой полосы. Задайте эту полосу системой неравенств.

**540.** Одна из сторон острого угла проходит через точки (−3; −2) и (−5; −3), а другая — через точки (−1; −3) и (−2; −4). Задайте этот угол системой неравенств.

**541.** Задайте системой неравенств:
а) треугольник, вершины которого — точки (0; 5), (−4; 0) и (4; 0);
б) четырехугольник с вершинами (−1; −1); (3; 3), (6; −1) и (2; −2).

**542.** Изобразите в координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ 3x + 2y \geqslant -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y < 3, \\ x + 2y \geqslant -2. \end{cases}$

**543.** Покажите штриховкой в координатной плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geqslant 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y \leqslant 0, \\ xy \geqslant 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 < 25, \\ (x+3)^2 + y^2 < 25; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy + 3x \leqslant 6, \\ x^2 + y \leqslant 0. \end{cases}$

**544.** Изобразите множество решений системы:

а) $\begin{cases} y - x^2 + 3 \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 16 \leqslant 0, \\ 3x - 4y + 12 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + x^2 \leqslant 2, \\ y - x^2 \geqslant -2, \\ x^2 + (y-3)^2 \geqslant 9. \end{cases}$

**545.** Покажите штриховкой множество решений неравенства:

а) $y(x^2 + y^2 - 16) \geqslant 0$; в) $x(x^2 + y^2 - 25) \leqslant 0$;

б) $(2x + y)(x^2 + y^2 + 1) \leqslant 0$; г) $(x - 3y)(x^2 + y^2 + 2) \geqslant 0$.

**546.** Найдите множество решений системы

$$\begin{cases} (x-5)^2 + y^2 \leqslant 25, \\ (x+5)^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$

**547.** Задайте системой неравенств кольцо, если ограничивающие его окружности имеют центр $(-1; 1)$ и радиусы равны 2 и 3 единицам.

**548.** Опишите системой неравенств меньшую часть круга с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 4 единицы, которую отсекает от него прямая, проходящая через точки $(-3; 3)$ и $(2; 1)$.

**549.** Центр одного круга — точка $(3; 0)$, а другого — $(-3; 0)$. Радиус каждого круга 5 единиц. Задайте пересечение кругов:

а) системой неравенств; б) аналитически.

## Упражнения для повторения

**550.** Как с помощью преобразования графиков получить график уравнения $4(x-2)^2 + 9(2y+4)^2 = 16$ из графика уравнения $x^2 + y^2 = 16$?

**551.** Имеет ли уравнение $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1 = 0$ целые корни?

**552.** Решите уравнение:

а) $3x^2 - 2|x - 5| - 3 = 0$; б) $2x^2 + 3|x + 4| - 2 = 0$.

## 26. Неравенства с двумя переменными, содержащие знак модуля

Рассмотрим неравенства, в которых содержатся выражения с переменными под знаком модуля. Например,

$$5x - 3|y - 2| \leqslant 4,$$
$$2x^2 - x|y| \geqslant 0.$$

Любое выражение под знаком модуля при некоторых условиях можно заменить выражением без знака модуля. Так, по определению модуля

$$|y - 2| = y - 2 \text{ при } y - 2 \geqslant 0$$
$$\text{и } |y - 2| = -(y - 2) \text{ при } y - 2 \leqslant 0.$$

Значит, неравенство $5x - 3|y - 2| \leqslant 4$ равносильно совокупности:

$$\begin{cases} 5x - 3(y - 2) \leqslant 4, \\ y - 2 \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 5x + 3(y - 2) \leqslant 4, \\ y - 2 \leqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Множество решений неравенства

$$5x - 3|y - 2| \leqslant 4$$

является объединением множеств решений систем (1). Это множество показано штриховкой на рисунке 82.

Пример 1. Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства

$$y + x^2 - 2|x - 1| \leqslant 0.$$

Освободимся от знака модуля. Получим

$$\begin{cases} y + x^2 - 2x + 2 \leqslant 0, \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} y + x^2 + 2x - 2 \leqslant 0, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

Построим графики уравнений

$$y = -x^2 + 2x - 2$$
$$\text{и } y = -x^2 - 2x + 2.$$

Эти уравнения можно представить в виде $y = -(x - 1)^2 - 1$ и $y = -(x + 1)^2 + 3$. Их графиками являются параболы, изображенные

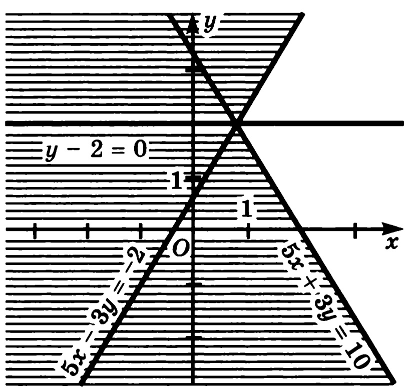


Рис. 82

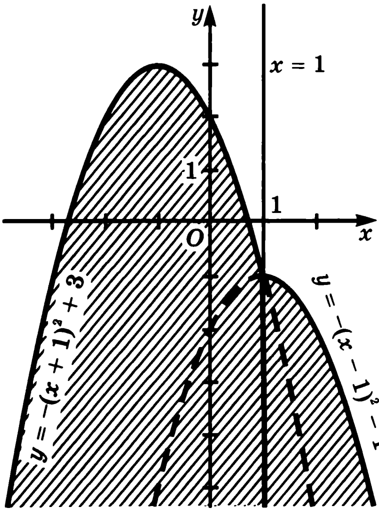



Рис. 83

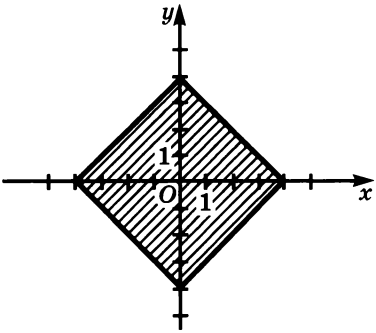



Рис. 84

на рисунке 83. Множество решений неравенства

$$y + x^2 - 2|x - 1| \leqslant 0$$

показано штриховкой на том же рисунке.

П р и м е р 2. Изобразим на координатной плоскости фигуру, которую задает неравенство $|x| + |y| \leqslant 4$.

Если пара $(x_0;\ y_0)$ является решением неравенства, то каждая из пар $(x_0;\ -y_0)$, $(-x_0;\ y_0)$ и $(-x_0;\ -y_0)$ также является его решением. Значит, искомая фигура симметрична относительно оси $x$ и относительно оси $y$.

Изобразим сначала ее часть, расположенную в первом координатном углу. Для первого координатного угла имеем систему

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x + y \leqslant 4. \end{cases}$$

Эта система задает треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 4$. Построим этот треугольник и, используя свойства симметрии, изобразим три остальные части. Полученная фигура представляет собой квадрат, изображенный на рисунке 84.

**553.** Покажите штриховкой на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y \geqslant |x - 3|$;  в) $y \geqslant |2{,}5 - x|$;

б) $y \leqslant |x + 5|$;  г) $y \leqslant |3{,}5x + x|$.

**554.** Покажите множество точек координатной плоскости, которое задает неравенство

$$2y - |2x + 5| \leqslant 0.$$

Опишите это множество аналитически.

**555.** Изобразите фигуру, которую задает неравенство, и найдите ее площадь:

а) $|x| + |y| \leqslant 5$; б) $|x - 3| + |y - 3| \leqslant 3$.

**556.** Изобразите множество решений неравенства:

а) $y \leqslant \dfrac{10}{|x|}$; в) $|y| - x^2 + 2x \leqslant 1$;

б) $y + \left|\dfrac{8}{x}\right| \geqslant 0$; г) $|y| + x^2 - 4x \geqslant 4$.

**557.** Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $x^2 + y^2 - 6|x| + 2y \leqslant -1$;

б) $x^2 + y^2 - 6x + 2|y| \leqslant -1$.

**558.** Изобразите на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases}(x - 2)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4,\\ |x| - |y| \leqslant 0.\end{cases}$$

Найдите решение этой системы:

а) с наименьшей абсциссой; в) с наибольшей абсциссой;

б) с наименьшей ординатой; г) с наибольшей ординатой.

**559.** Заштрихуйте на координатной плоскости фигуру, которая задается системой

$$\begin{cases}y - 4 \leqslant x^2 - 4|x|,\\ 4x - 3y \leqslant -12.\end{cases}$$

Охарактеризуйте аналитически эту фигуру.

**560.** Изобразите множество решений системы:

а) $\begin{cases}x^2 + y^2 \leqslant 9,\\ |x| + |y| \leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2 + y^2 \leqslant 9,\\ |y| - |x| \leqslant 0.\end{cases}$

**561.** Задайте системой неравенств, содержащих знак модуля, квадрат с вершинами (5; 5), (5; –5), (–5; 5) и (–5; –5).

**562.** Какое множество точек задает система неравенств:

а) $\begin{cases}2 \leqslant |x| \leqslant 4,\\ 1 \leqslant |y| \leqslant 3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}1 \leqslant |x| \leqslant 5,\\ 2 \leqslant |y| \leqslant 5?\end{cases}$

**563.** Изобразите множество решений системы:

а) $\begin{cases} 2 \leqslant |x + 1| \leqslant 4, \\ 1 \leqslant |y - 2| \leqslant 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 \leqslant |x + y| \leqslant 5, \\ 2 \leqslant |x - y| \leqslant 4. \end{cases}$

## Упражнения для повторения

**564.** Окружность с центром в начале координат проходит через точку (30; 40). Она разбивает множество не принадлежащих ей точек координатной плоскости на внутреннюю и внешнюю области. Напишите неравенство, графиком которого является:
а) внутренняя область;
б) внешняя область.

**565.** Найдите корни уравнения $x^3 - 2x^2 + 3x - 18 = 0$.

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Сформулируйте определение линейного неравенства с двумя переменными. Приведите примеры.

**2.** Какой фигурой является график линейного неравенства?

**3.** Какую фигуру представляет множество точек координатной плоскости, координаты которых — решения системы линейных неравенств?

**4.** Возьмите какую-нибудь систему неравенств и объясните, как изобразить в координатной плоскости множество ее решений.

## Дополнительные упражнения к главе 3

### К параграфу 8

**566.** Докажите, что не имеет решений уравнение:

а) $4x^2 + 4xy + y^2 + 1 = 0$; в) $x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$;

б) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2 = 0$; г) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$.

**567.** Верно ли, что уравнение $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$ имеет единственное решение?

**568.** Докажите, что уравнение $x^2 - 8xy + 17y^2 + 2y + 1 = 0$ имеет единственное решение.

**569.** Найдите все целые решения уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 3$;   в) $x^2 - \dfrac{3}{y^2} = 1$;

б) $x^2 - y^2 = 4$;   г) $\dfrac{4}{x^2} + y^2 = 6$.

**570.** Окружность $x^2 + y^2 = 16$ разбивает множество не принадлежащих ей точек координатной плоскости на две области — внутреннюю и внешнюю. Какой из этих областей принадлежит точка:

а) $A(3{,}2;\ 2{,}5)$;   в) $C(-0{,}9;\ -3{,}9)$;

б) $B(-1{,}7;\ 3{,}6)$;   г) $D(3{,}8;\ -1{,}2)$?

**571.** Начертите график уравнения:

а) $(y + 4)(x - 3) = 0$;   в) $(y - x^2)(y + x^2) = 0$;

б) $(y - x)(y - 2) = 0$;   г) $4y^2 - x^2 = 0$.

**572.** Постройте график уравнения:

а) $y - |x| = 2$;   в) $|x| + |y| = 3$;   д) $|x| + |y| = x + y$;

б) $x + |y| = 2$;   г) $|x| - |y| = 3$;   е) $|x| - |y| = x - y$.

**573.** Докажите, что не имеет решений система:

а) $\begin{cases} 3xy - 2x + 4y = 12, \\ 5x^2 + 2y^2 + 1 = 0; \end{cases}$   б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = -5. \end{cases}$

**574.** Выясните, используя графики уравнений, сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - y = -2, \\ 2x^2 - y - 5 = 0; \end{cases}$   б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -2. \end{cases}$

**575.** Используя графики уравнений, найдите (приближенно) решения системы:

а) $\begin{cases} y + \dfrac{1}{2}x^2 = 2, \\ y + 1 = 2x^2; \end{cases}$   б) $\begin{cases} 2xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

**576.** С помощью графиков уравнений найдите (приближенно) решения системы:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ xy + 12 = 0; \end{cases}$   в) $\begin{cases} y - x^2 + x = 0, \\ y + x^2 + 3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - y)(x + y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 4; \end{cases}$   г) $\begin{cases} (y - x^2)(y - 2x) = 0, \\ y + x + 1 = 0. \end{cases}$

**577.** Найдите решения системы:

а) $\begin{cases} x^2 - 4y = -8, \\ 3x^2 + 2y = 18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 2y^2 = 9, \\ 6x - 3y^2 = -45; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3y = 21, \\ 5x^2 - 11x - 9y = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x - 3y - 5y^2 = 8, \\ 2x - 2y - 3y^2 = 3. \end{cases}$

**578.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x^2 - 5y^2 - 3y = -10, \\ 2x^2 - 3y^2 - 2y = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x = -1, \\ -2x^2 + 3y^2 + 5x = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2xy - 5y = 5, \\ 3y^2 - 2xy = 45; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy = -8, \\ xy - x = 10. \end{cases}$

**579.** Найдите множество решений системы:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 = 2xy, \\ x^2 + y^2 - 4 = -2xy; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 49, \\ x^2 + y^2 + 2xy = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 4xy = 49, \\ 4x^2 + y^2 - 4xy = 81; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 64 + 12xy, \\ 9x^2 + 4y^2 = 16 - 12xy. \end{cases}$

**580.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = -10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 - xy = 0, \\ x^2 + y^2 = 4\frac{1}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 31, \\ xy - 6 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 6, \\ 5 - xy = 0. \end{cases}$

**581.** Найдите множество решений системы:

а) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -16, \\ (x - y)(x + y) = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (2x + y)(2y - x) = 0, \\ \frac{1}{2}x^2 - 2xy - y^2 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - x = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - y^2 - y = 24, \\ x^2 - 4y^2 = 0. \end{cases}$

**582.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x - y)^2 + 2(x - y) = 3, \\ 3x^2 + xy + y^2 = 27; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x + y)^2 - x - y = 4, \\ \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = -2. \end{cases}$

**583.** При каком значении $m$ имеет решение система

$$\begin{cases} 2x - 3xy = m, \\ x - y = 5? \end{cases}$$

**584.** Докажите, что при любом значении $m$ имеет решение система

$$\begin{cases} 2xy - 3y^2 = 0, \\ x + y = m. \end{cases}$$

**585.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - 2y = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{x} + x - y = -2, \\ 3x + y = 11. \end{cases}$

**586.** Решите систему

$$\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 + |x - 1|. \end{cases}$$

**587.** Если к знаменателю обыкновенной дроби прибавить 1, то значение дроби уменьшится на $\frac{1}{6}$, а если из знаменателя вычесть 1, то значение дроби увеличится на $\frac{1}{3}$. Найдите эту дробь.

**588.** Если из числителя и знаменателя обыкновенной дроби вычесть по 2, то значение дроби уменьшится на $\frac{1}{6}$, а если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби увеличится на $\frac{1}{12}$. Найдите дробь.

**589.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а его площадь равна 150 см$^2$. Найдите катеты этого треугольника.

**590.** В равнобедренный треугольник вписан ромб так, что одна его сторона лежит на основании, а другая — на боковой стороне треугольника. Сторона ромба равна 10 см, а периметр треугольника равен 75 см. Найдите стороны треугольника.

**591.** В прямоугольный треугольник вписан квадрат со стороной 2 см так, что одна его вершина совпадает с вершиной прямого угла, а остальные лежат по одной на каждой из сторон. Найдите катеты треугольника, если один из них больше другого на 3 см.

**592.** Два каменщика, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 6 ч. Если бы один из них выполнил $\frac{2}{5}$ работы, а потом второй закончил бы работу, то им понадобилось бы 12 ч. За сколько часов каждый каменщик мог бы один выполнить всю работу?

**593.** Две машинистки могут перепечатать рукопись за 12 ч. Одна из них может перепечатать половину рукописи за то же время, за которое вторая перепечатает третью часть рукописи. За сколько часов каждая машинистка может перепечатать рукопись?

**594.** Один велосипедист выехал из $A$ в $B$, и в то же время другой выехал из $B$ в $A$. Встреча произошла через 3 ч после выезда. В конечный пункт первый прибыл на 2,5 ч позже, чем второй. Найдите скорости велосипедистов, если расстояние между $A$ и $B$ равно 90 км.

**595.** Из $A$ в $B$ вышел лыжник. Через 50 мин другой лыжник вышел из $B$ в $A$. В конечные пункты они пришли одновременно через час после встречи. Найдите скорости лыжников, если расстояние между $A$ и $B$ равно 25 км.

**596.** Перемножив многочлены вида $ax + 3$ и $x^2 + bx - 2$ с переменной $x$, получили многочлен вида $ax^3 + 23x^2 + 7x - 6$. Найдите коэффициенты $a$ и $b$.

### К параграфу 9

**597.** Изобразите график неравенства:

а) $2x + 3y - 6 \leqslant 0$; в) $y \leqslant |x + 1| - 3$;

б) $2y - x \geqslant 5$; г) $y \geqslant |2 - 0{,}5x| + 1$.

**598.** Начертите прямую, проходящую через точки $A(1;\ 1)$ и $B(-2;\ 1)$. Напишите неравенства, графиками которых являются верхняя и нижняя полуплоскости, определяемые этой прямой.

**599.** Изобразите график неравенства:

а) $y \leqslant 0{,}5x^2 + 1$;
б) $y \geqslant -\frac{1}{3}x^2 - 1$;
в) $y + 2x^2 - 4 \leqslant 0$;
г) $y - 2x^2 + 3 \geqslant 0$;
д) $xy \leqslant 6$;
е) $xy \geqslant -6$.

**600.** Постройте график неравенства:

а) $|x| + |y| \leqslant 3$;
б) $|x| - |y| \geqslant 2$;
в) $|y| \leqslant x - 1$;
г) $|y| \geqslant x + 1$.

**601.** Изобразите множество точек, задаваемое системой:

а) $\begin{cases} 2y \leqslant x + 10, \\ y + 2x \leqslant 8, \\ y \leqslant -0{,}3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y + x \geqslant -5, \\ x - y \geqslant 5, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

**602.** Какую фигуру представляет множество точек координатной плоскости, задаваемое системой:

а) $\begin{cases} y - x \leqslant 2, \\ y + x \leqslant 4; \end{cases}$
б) $\begin{cases} y + 1 \leqslant x, \\ y + 3 \geqslant x; \end{cases}$
в) $\begin{cases} y + x \geqslant 2, \\ y + x \leqslant -2; \end{cases}$
г) $\begin{cases} y + 3 \geqslant \frac{1}{2}x, \\ 2y - x \leqslant -3? \end{cases}$

**603.** При каких значениях $m$ множество точек координатной плоскости, задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} 3y + x \geqslant m, \\ y + \frac{1}{3}x \leqslant -2, \end{cases}$$

является:
а) полосой;
б) прямой;
в) пустым множеством?

**604.** Покажите штриховкой в координатной плоскости множество точек, задаваемое системой:

а) $\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 3, \\ x^2 + y^2 \leqslant 16; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ |x| \leqslant 2{,}5; \end{cases}$
в) $\begin{cases} y > x^2 - 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 6{,}25; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ xy \leqslant 0; \end{cases}$
д) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 49, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25; \end{cases}$
е) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 16, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$

**605.** Напишите систему неравенств, которой задается:
а) квадрат с вершинами $A(0; 3)$, $B(-3; 0)$, $C(0; -3)$ и $D(3; 0)$;
б) треугольник с вершинами $A(0; 4)$, $B(-2; 0)$ и $C(2; 0)$.

**606.** Изобразите множество решений системы:

а) $\begin{cases} 4x - 5|y| \leqslant 6, \\ 2|y| + 4x \geqslant -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |3x - 4| + 2y \geqslant 8, \\ |3x - 4y| - 5y \leqslant -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3|x| + 5y > 1, \\ 2|x| - 6y \geqslant -5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x + 2| - 6y \geqslant -1, \\ |x - 2| + 5y \geqslant -2. \end{cases}$

**607.** Покажите штриховкой на координатной плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} |x^2 - 4| + 2y \leqslant 1, \\ 3x - 5y \geqslant 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5y - |x^2 - 9| \geqslant 0, \\ 2|y| + 6x \geqslant -1. \end{cases}$

ГЛАВА 4

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## § 10. СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

### 27. Числовые последовательности. Способы задания последовательностей

Натуральные числа, дающие при делении на 5 остаток 1, взятые в порядке возрастания, образуют *последовательность*

$$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ \ldots .$$

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности.* Члены последовательности принято обозначать буквами с индексами, где индекс указывает порядковый номер члена последовательности, например $a_1$, $a_5$, $a_n$, $a_{n+2}$. Последовательность обычно обозначают символом вида $(a_n)$.

Рассмотренная последовательность является бесконечной последовательностью. Приведем другие примеры бесконечных последовательностей:

— последовательность целых отрицательных чисел, взятых в порядке убывания:

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ \ldots ;$$

— последовательность, в которой на нечетном месте находится число 1, а на четном месте — число $-1$;

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots ;$$

— последовательность, каждый член которой равен $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \ldots .$$

В бесконечной числовой последовательности каждому натуральному числу $n$ соответствует определенный член последовательности. Значит, *бесконечная последовательность представляет собой функцию, областью определения которой является множество натуральных чисел.*

Последовательность может состоять из $n$ членов. Такую последовательность называют конечной. Примером конечной последовательности может служить последовательность правильных дробей со знаменателем 11, взятых в порядке возрастания:

$$\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}.$$

*Конечная последовательность, состоящая из n членов, представляет собой функцию, областью определения которой является множество первых n натуральных чисел.*

Остановимся еще на некоторых примерах последовательностей.

Пифагор (VI в. до н. э.) и его ученики рассматривали последовательности, связанные с геометрическими фигурами. Так, например, подсчитывая число кружков в треугольниках, четырехугольниках, пятиугольниках (рис. 85), они получали последовательности

— треугольных чисел:

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots, a_n, \dots;$$

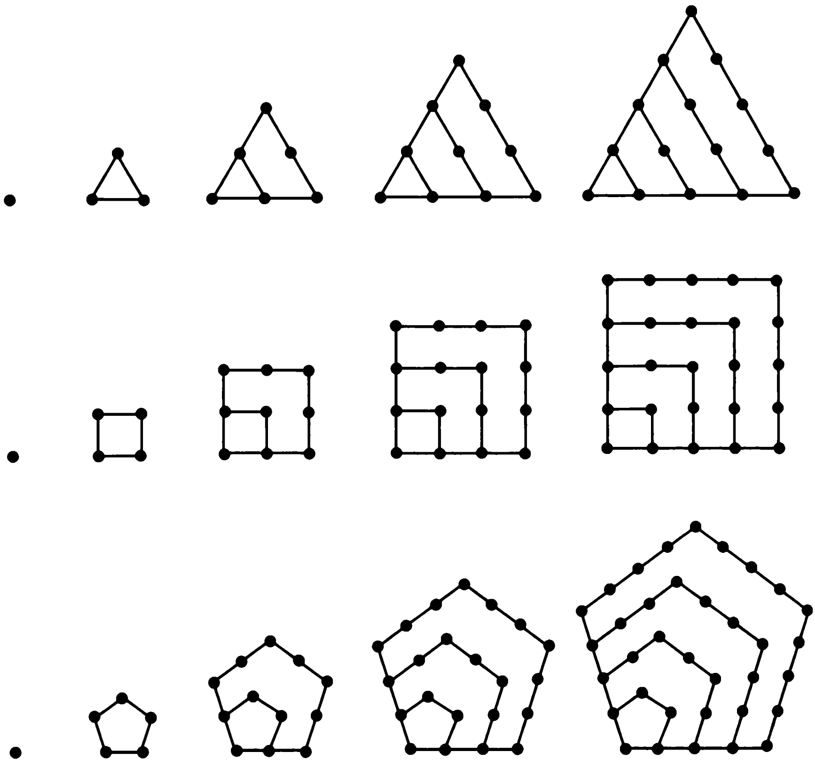


**Рис. 85**

— квадратных чисел:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \dots,\ b_n,\ \dots;$$

— пятиугольных чисел:

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ \dots,\ c_n,\ \dots.$$

Последовательность $(a_n)$ треугольных чисел получается из последовательности натуральных чисел следующим образом: $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 2$, $a_3 = 1 + 2 + 3$, $a_4 = 1 + 2 + 3 + 4$ и т. д. Последовательность квадратных чисел можно получить аналогичным способом из последовательности нечетных чисел 1, 3, 5, 7, 9, ... , т. е. $b_1 = 1$, $b_2 = 1 + 3$, $b_3 = 1 + 3 + 5$, $b_4 = 1 + 3 + 5 + 7$ и т. д. Последовательность пятиугольных чисел получается таким же способом из последовательности 1, 4, 7, 10, 13, ... , в которой первый член равен 1 и каждый следующий на 3 больше предыдущего, а именно $c_1 = 1$, $c_2 = 1 + 4$, $c_3 = 1 + 4 + 7$, $c_4 = 1 + 4 + 7 + 10$ и т. д.

Последовательность считается заданной, если указан способ, позволяющий найти член последовательности с любым номером. Последовательность может быть задана с помощью описания, дающего возможность для любого $n$ указать соответствующий член последовательности.

Пример 1. Пусть $(x_n)$ — последовательность, каждый член которой равен остатку от деления номера члена на 4. Эта последовательность начинается так:

$$1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ \dots.$$

Для любого номера $n$ можно указать соответствующий член последовательности $(x_n)$. Например, $x_{38} = 2$, $x_{753} = 1$, $x_{2003} = 3$, $x_{5724} = 0$.

Наиболее распространенным способом является задание последовательности формулой, по которой для любого $n$ можно вычислить соответствующий член последовательности. Такую формулу называют *формулой $n$-го члена последовательности.*

Пример 2. Пусть последовательность $(y_n)$ задана формулой $y_n = 2^n + (-1)^n n$. Формула позволяет найти $n$-й член последовательности при любом $n$. Например,

$$y_1 = 2^1 + (-1)^1 \cdot 1 = 1,$$
$$y_2 = 2^2 + (-1)^2 \cdot 2 = 6,$$
$$y_7 = 2^7 + (-1)^7 \cdot 7 = 121,$$
$$y_{10} = 2^{10} + (-1)^{10} \cdot 10 = 1034.$$

Иногда последовательность задают, указывая ее первый член или первые несколько членов и формулу или правило, позволяющее найти любой член последовательности по известным предшествующим членам. Такой способ задания последовательности называют *рекуррентным* способом (от лат. *recurrentis* — возвращающийся).

Приведем пример задания последовательности рекуррентным способом.

Пример 3. Пусть $(u_n)$ — последовательность, в которой $u_1 = u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ при $n > 2$.

Найдем несколько членов этой последовательности. Имеем:

$$u_3 = 1 + 1 = 2,\ u_4 = 2 + 1 = 3,\ u_5 = 3 + 2 = 5,$$
$$u_6 = 5 + 3 = 8,\ u_7 = 8 + 5 = 13,\ u_8 = 13 + 8 = 21.$$

Последовательность $(u_n)$ начинается так:

$$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ \ldots .$$

Задача, приводящая к такой последовательности, впервые описана в работах итальянского математика Леонардо Пизанского (1180—1240 гг.), известного под именем Фибоначчи («сын Боначчо»). Эту последовательность называют *последовательностью Фибоначчи*, а ее члены — *числами Фибоначчи*. Последовательность Фибоначчи обладает многими интересными свойствами, например, $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$ при любом $n$.

Члены последовательностей можно изображать точками на координатной прямой или точками в координатной плоскости.

На координатной прямой члены последовательности $(u_n)$ изображаются точками, координаты которых равны

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots .$$

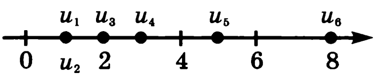



**Рис. 86**

Около каждой точки обычно указывают, какой член последовательности она изображает.

При изображении членов последовательности $(u_n)$ на координатной плоскости каждый член $u_n$ изображается точкой, абсцисса которой равна $n$, а ордината $u_n$, т. е. точкой с координатами $(n;\ u_n)$. Около точки указывают, какой член последовательности изображает эта точка.

На рисунках 86 и 87 изображены на координатной прямой и в координатной плоскости первые шесть членов последовательности Фибоначчи.

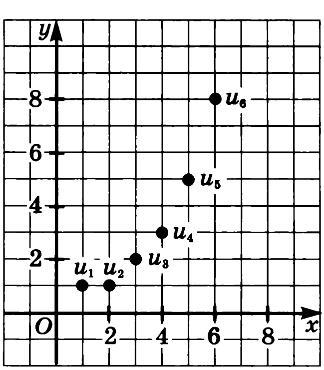



**Рис. 87**

**608.** Пусть $(a_n)$ — последовательность приближенных значений дроби $\frac{1}{6}$, взятых с недостатком с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Найдите $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_{10}$, $a_{31}$, $a_{100}$.

**609.** Укажите первые три и последние три члена последовательности $(b_n)$, если $(b_n)$ — последовательность:

а) простых чисел, не превосходящих 100, взятых в порядке возрастания;

б) натуральных делителей числа 6285, взятых в порядке возрастания.

**610.** Последовательность задана формулой:

а) $a_n = -0{,}3n + 1$;  в) $a_n = (-1)^{n+1}(n + 1)$;

б) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$;  г) $a_n = \frac{(-1)^n 6}{n}$.

Найдите $a_1$, $a_4$, $a_{100}$, $a_{k+1}$, $a_{2k}$.

**611.** В последовательности найдите $a_9$, $a_{12}$, $a_{2004}$, $a_{2k}$, $a_{2k+1}$, если

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ при четном } n, \\ n(n+1) \text{ при нечетном } n. \end{cases}$$

**612.** Найдите первые шесть членов последовательности, заданной рекуррентным способом:

а) $c_1 = 13$, $c_{n+1} = c_n = 2$;

б) $c_1 = -12$, $c_{n+1} = -3c_n$;

в) $c_1 = 6$, $c_{n+1} = n \cdot c_n$;

г) $c_1 = 7$, $c_2 = 4$, $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$;

д) $c_1 = -3$, $c_2 = -5$, $c_{n+1} = c_n \cdot c_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$.

**613.** Докажите, что если $(u_n)$ является последовательностью Фибоначчи, т. е. задается условием $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$ при $n > 2$, то верно равенство

$$u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2 = u_n \cdot u_{n+3}.$$

**614.** Последовательность $(c_n)$ задана формулой

$$c_n = n^2 + n + 11.$$

Являются ли первые восемь членов этой последовательности простыми числами? Являются ли все члены последовательности $(c_n)$ простыми числами?

**615.** Последовательность задана формулой

$$a_n = n(n + 4).$$

Является ли указанное число членом последовательности, и если да, то каков его номер:

а) 30; б) 45; в) 77; г) 140?

**616.** Встретится ли среди членов последовательности $(x_n)$ число 0 (при положительном ответе укажите, на каком месте оно записано), если:

а) $x_n = n^3 - n^2 - 9n + 9$; в) $x_n = n^4 - 20n^2 + 64$;

б) $x_n = 2n^2 - 21n - 11$; г) $x_n = n^3 + n - 10$?

**617.** Есть ли среди членов последовательности $(a_n)$ отрицательные числа, и если да, то каковы их номера, если:

а) $a_n = n^2 - 11n + 28$; в) $a_n = 0{,}5n^2 - 3n + 2$;

б) $a_n = 1{,}2n^2 + n + 0{,}2$; г) $a_n = 0{,}1n^3 - 1{,}6n$?

**618.** Найдите все члены последовательности $(c_n)$, где $c_n = 0{,}25n^2 - n$, заключенные между числами 3 и 8.

**619.** Последовательности $(a_n)$ и $(b_n)$ заданы формулами $a_n = n^3 - 6$, $b_n = 3n^2 - 8n$. Докажите, что при любом $n$ верно неравенство $a_n \geqslant b_n$.

**620.** Задайте формулой $n$-го члена:

а) последовательность целых отрицательных чисел, кратных 7, взятых в порядке убывания;

б) последовательность натуральных нечетных чисел, взятых в порядке возрастания;

в) последовательность натуральных чисел, дающих при делении на 6 остаток 1, взятых в порядке возрастания.

**621.** Укажите какую-либо формулу $n$-го члена, задающую последовательность:

а) 8, −8; 8, −8, ... ; д) 7, −14, 21, −28, ... ;

б) 3, 5, 7, 9, ... ; е) $2 \cdot 4,\ 4 \cdot 6,\ 6 \cdot 8,\ 8 \cdot 10, \ldots$ ;

в) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ; ж) $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \ldots$ ;

г) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots$ ; з) $\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 4}, \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5}, \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 6}, \frac{5 \cdot 6}{4 \cdot 7}, \ldots$ .

**622.** Задайте рекуррентным способом последовательность:

а) треугольных чисел; в) пятиугольных чисел.

б) квадратных чисел;

**623.** Известно, что в последовательности $(a_n)$

а) $a_1 = 10,\ a_{n+1} = a_n + 2$; б) $a_1 = 10,\ a_{n+1} = 5a_n$.

Задайте эту последовательность формулой $n$-го члена.

**624.** Выпишите первые шесть членов последовательности $(a_n)$ и изобразите их точками на координатной прямой, если:

а) $a_n = (-1)^n n - 2$; б) $a_n = \frac{(-2)^n}{8}$.

**625.** Изобразите точками на координатной плоскости первые шесть членов последовательности $(b_n)$ и укажите, вдоль какой линии расположены эти точки, если:

а) $b_n = 0{,}4n - 1$; б) $b_n = \frac{6}{n}$; в) $b_n = 0{,}5n^2 - 8$.

**626.** Последовательность $(a_n)$ задана формулой

$$a_n = n^2 - 6n + 5.$$

Найдите все члены последовательности, которые изображаются на координатной плоскости точками, расположенными ниже прямой $y = 12$.

**627.** Сколько членов последовательности $(b_n)$, где

$$b_n = \frac{n^2 - 12}{n},$$

изображаются на координатной плоскости точками, расположенными внутри полосы, ограниченной прямыми $y = 3$ и $y = 6$? Найдите эти члены последовательности.

## Упражнения для повторения

**628.** Решите неравенство:

а) $2x^4 - 5x^2 - 12 < 0$; б) $x^3 - 5x^2 - x + 5 > 0$.

**629.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x + xy + y = 19. \end{cases}$

**630.** При каких целых значениях $m$ является целым числом значение дроби:

а) $\frac{5m - 3}{m + 2}$; б) $\frac{6m - 8}{m - 1}$?

## 28. Возрастающие и убывающие последовательности

В последовательности $(b_n)$

$$0{,}4,\ 1{,}6,\ 3{,}6,\ 6{,}4,\ \ldots,\ 0{,}4n^2,\ \ldots$$

каждый последующий член больше предыдущего, т. е.

$$b_{n+1} > b_n$$

при любом $n$.

В последовательности $(c_n)$

$$6,\ 3,\ 2,\ 1{,}5,\ \ldots,\ \frac{6}{n},\ \ldots$$

каждый последующий член меньше предыдущего, т. е.

$$c_{n+1} < c_n$$

при любом $n$.

Говорят, что последовательность $(b_n)$ является возрастающей, а последовательность $(c_n)$ — убывающей.

Определение. **Последовательность, в которой каждый последующий член больше предыдущего, называется возрастающей. Последовательность, в которой каждый последующий член меньше предыдущего, называется убывающей.**

Числовая последовательность, как известно, является функцией, заданной на множестве всех натуральных чисел или первых $n$ натуральных чисел. Введенное определение полностью согласуется с определением возрастающей и убывающей функций. Действительно, пусть, например, $(a_n)$ — возрастающая последовательность и $k < m$ ($k \in N$, $m \in N$). Тогда $a_k < a_{k+1}$, $a_{k+1} < a_{k+2}$, ..., $a_{m-1} < a_m$ и в силу транзитивности отношения «меньше» верно неравенство $a_k < a_m$.

Возрастающие и убывающие последовательности называют *монотонными последовательностями*.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Выясним, является ли возрастающей или убывающей последовательность $(a_n)$, если $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Преобразуем разность $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

При любом $n$ рассматриваемая разность положительна. Значит, $a_{n+1} > a_n$ при любом $n$, т. е. последовательность $(a_n)$ возрастающая.

Убедиться в этом можно иначе. Выделив из дроби $\frac{n}{n+1}$ целую часть, получим $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. С увеличением $n$ дробь $\frac{1}{n+1}$ убывает, а значит, разность $1 - \frac{1}{n+1}$ возрастает, т. е. последовательность $(a_n)$ возрастающая.

Пример 2. Исследуем на монотонность последовательность $(y_n)$, заданную формулой $y_n = n^2 - 8n$.

Выпишем первые несколько членов последовательности:

$$-7, -12, -15, -16, \dots .$$

Можно предположить, что последовательность $(y_n)$ убывающая. Чтобы выяснить, верно ли это предположение, преобразуем разность $y_{n+1} - y_n$:

$$y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - 8(n+1) - (n^2 - 8n) =$$
$$= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 - n^2 + 8n = 2n - 7.$$

В зависимости от $n$ разность $y_{n+1} - y_n$ может быть положительной или отрицательной. Значит, данная последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей, т. е. не является монотонной.

Пример 3. Выясним, при каких значениях $a$ последовательность $(y_n)$, где $y_n = n^2 - 2an + a^2$, является возрастающей.

Воспользуемся геометрическими соображениями. На координатной плоскости члены последовательности $(y_n)$ изображаются точками, расположенными вдоль графика функции $y = x^2 - 2ax + a^2$, т. е. вдоль параболы, которая касается оси абсцисс в точке $a$ (рис. 88). При этом первый член изображается точкой с абсциссой 1. Очевидно, что последовательность $(y_n)$ является возрастающей, когда все точки, изображающие ее члены, располагаются вдоль правой ветви параболы, причем точка с абсциссой 1 лежит правее точки касания или совпадает с ней. Значит, последовательность $(y_n)$ является возрастающей при $a \leqslant 1$.

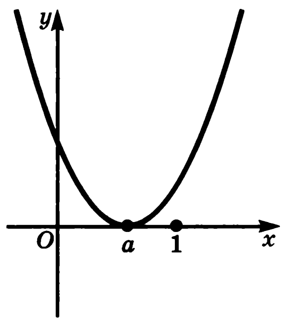


Рис. 88

**631.** Является ли возрастающей или убывающей последовательность $(u_n)$, в которой член $u_n$ равен:

а) числу, противоположному $n$;
б) числу, обратному $n$;
в) пятой степени числа $n$;
г) $n$-й степени числа?

**632.** Найдите первые четыре члена последовательности $(a_n)$, заданной формулой:

а) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$;  б) $a_n = 8n - n^2$.

Какое предположение о характере монотонности последовательности $(a_n)$ можно сделать? Докажите или опровергните справедливость этого предположения.

**633.** Докажите, что последовательность $(a_n)$, где $a_n = \dfrac{5n-1}{n+2}$, является возрастающей. Изобразите на координатной плоскости первые четыре члена этой последовательности.

**634.** Докажите, что последовательность $(b_n)$, где $b_n = \dfrac{n+8}{2n+1}$, является убывающей. Изобразите на координатной плоскости первые четыре члена этой последовательности.

**635.** Докажите, что последовательность $(c_n)$ не является монотонной, если:

а) $c_n = n^2 - 9n - 22$;  в) $c_n = 0{,}1n^2 - n$;

б) $c_n = \dfrac{3n-1}{3n-5}$;  г) $c_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+4}$.

**636.** Исследуйте на монотонность последовательность $(a_n)$, заданную формулой:

а) $a_n = -7^n$;  д) $a_n = 0{,}4n^2 + 1{,}2$;

б) $a_n = \dfrac{5n+2}{n+4}$;  е) $a_n = \dfrac{n^2+2n+1}{n+2}$;

в) $a_n = \dfrac{3n-1}{3n-7{,}5}$;  ж) $a_n = n^2 - 36n$;

г) $a_n = \dfrac{(-1)^n 15}{n}$;  з) $a_n = \dfrac{n+2}{n^2+4}$.

**637.** Верно ли утверждение:

а) если функция $y = f(x)$ возрастающая, то последовательность $(a_n)$, где $a_n = f(n)$, также является возрастающей;

б) если функция $y = f(x)$ не является возрастающей, то последовательность $(b_n)$, где $b_n = f(n)$, также не является возрастающей?

**638.** Определите, является ли возрастающей или убывающей последовательность, если:

а) $a_n = \sqrt{n} - 5$;  в) $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$;

б) $a_n = \dfrac{3}{\sqrt{n}}$;  г) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+2}$.

**639.** При каких значениях $a$ является возрастающей последовательность $(b_n)$, заданная формулой:

а) $b_n = \dfrac{5n + a}{n}$; б) $b_n = n^2 - a$; в) $b_n = (2n - a)^2$?

**640.** При каких значениях $a$ последовательность $(u_n)$ является возрастающей и при каких — убывающей, если:

а) $u_n = \dfrac{n^2 - 4an}{n^2}$; б) $u_n = \dfrac{5n + a}{n + 2}$?

**641.** Найдите, если возможно, наибольший член последовательности $(a_n)$, если:

а) $a_n = 13 - 4n$; б) $a_n = -n^2 + 5$; в) $a_n = \dfrac{3n - 1}{n + 2}$.

**642.** Найдите, если возможно, наименьший член последовательности $(b_n)$, если:

а) $b_n = 2{,}7n - 2$; в) $b_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

б) $b_n = n^2 - 6n + 9$;

## Упражнения для повторения

**643.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 15, \\ x^2 y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y^2 = 8, \\ xy^2 = -9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + xy = 6, \\ xy + y^2 = -2. \end{cases}$

**644.** Решите уравнение:

а) $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$; б) $x^3 + 2x - 33 = 0$.

## 29. Ограниченные и неограниченные последовательности

Выпишем первые несколько членов последовательности $(b_n)$, заданной формулой $b_n = \dfrac{4n - 1}{n + 1}$:

$$1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{3}{4},\ 3,\ 3\frac{1}{6},\ 3\frac{2}{7},\ 3\frac{3}{8},\ 3\frac{4}{9},\ \dots .$$

Можно предположить, что последовательность $(b_n)$ является возрастающей. Действительно, исключив из дроби $\dfrac{4n - 1}{n + 1}$ целую

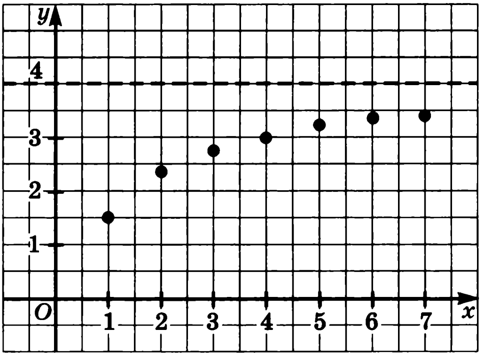



**Рис. 89**

часть, получим $b_n = 4 - \frac{5}{n+1}$. С увеличением $n$ дробь $\frac{5}{n+1}$ уменьшается и поэтому разность $4 - \frac{5}{n+1}$ увеличивается. Однако из формулы $b_n = 4 - \frac{5}{n+1}$ ясно, что хотя с возрастанием $n$ члены последовательности возрастают, они остаются меньше числа 4, т. е. $b_n \leqslant 4$ при любом $n$. На координатной плоскости члены последовательности изображаются точками, лежащими ниже прямой $y = 4$ (рис. 89). Говорят, что последовательность $(b_n)$ ограничена сверху. Заметим, что в качестве граничного числа можно взять любое другое число, большее, чем 4.

Приведем другой пример.

Пусть последовательность $(c_n)$ задана формулой $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Выпишем первые несколько членов этой последовательности:

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ -\frac{1}{8},\ \ldots .$$

Последовательность $(c_n)$ не является ни возрастающей, ни убывающей. При этом ни один из ее членов не превосходит 1, т. е. $c_n \leqslant 1$ при любом $n$. Последовательность $(c_n)$ также является примером последовательности, ограниченной сверху.

Определение. **Последовательность $(a_n)$ называется ограниченной сверху, если существует такое число $m$, что $a_n \leqslant m$ при любом $n$.**

Члены последовательности $(a_n)$, ограниченной сверху числом $m$, изображаются на координатной прямой точками, которые либо совпадают с точкой с абсциссой $m$, либо лежат левее этой точки, а на координатной плоскости они изображаются точками, которые либо принадлежат прямой $y = m$, либо лежат ниже этой прямой.

Рассмотрим теперь последовательность $(u_n)$, заданную формулой $u_n = 0{,}5n^2 - 5$. Выпишем первые несколько членов этой последовательности:

$$-4{,}5,\ -3,\ -0{,}5,\ 3,\ 7{,}5,\ \ldots .$$

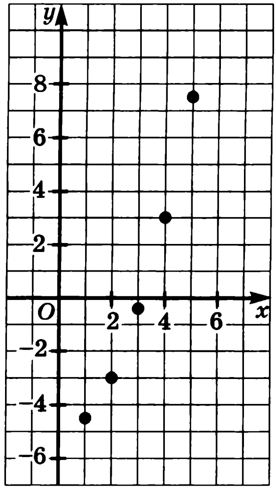


**Рис. 90**

Очевидно, что для любого члена последовательности верно неравенство $u_n \geqslant -4{,}5$. На координатной плоскости первый член последовательности $(u_n)$ изображается точкой, принадлежащей прямой $y = -4{,}5$, а остальные — точками, лежащими выше этой прямой (рис. 90). Говорят, что последовательность $(u_n)$ ограничена снизу. Заметим, что в качестве граничного числа можно указать любое число, меньшее, чем $-4{,}5$.

Определение. **Последовательность $(a_n)$ называется ограниченной снизу, если существует такое число $p$, что $a_n \geqslant p$ при любом $n$.**

На координатной прямой члены последовательности, ограниченной снизу числом $p$, изображаются точками, которые либо совпадают с точкой, абсцисса которой равна $p$, либо лежат правее нее, а на координатной плоскости они изображаются точками, которые принадлежат прямой $y = p$ или лежат выше нее.

Последовательность может быть ограничена и сверху, и снизу.

Определение. **Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется ограниченной последовательностью.**

Вернемся к рассмотренным примерам.

Мы показали, что последовательность $(b_n)$, где $b_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$, ограничена сверху. Она ограничена также и снизу, так как является возрастающей и потому любой ее член больше $b_1$, т. е. больше $1\dfrac{1}{2}$. Таким образом, $(b_n)$ — ограниченная последовательность.

Последовательность $(c_n)$ также является ограниченной. Действительно, она, как было показано, ограничена сверху и вместе с тем ограничена снизу, так любой ее член больше, например, числа $-1$.

Последовательность $(u_n)$, как мы показали, ограничена снизу, но она не ограничена сверху, так как для любого числа $k$ найдется такое значение $n$, при котором $u_n > k$, т. е. последовательность $(u_n)$ не является ограниченной.

Если последовательность $(a_n)$ ограниченная, то существуют такие числа $m$ и $p$, что $m \leqslant a_n \leqslant p$, где $m \neq p$. На координатной прямой члены такой последовательности изображаются точками, принадлежащими отрезку $[m; p]$ а на координатной плоскости — точками, принадлежащими полосе, ограниченной прямыми $y = m$ и $y = p$, включая границы.

Последовательность может быть не ограничена ни сверху, ни снизу. Примером может служить последовательность $(x_n)$, заданная формулой $x_n = (-2)^n$.

**645.** Является ли ограниченной последовательность:

а) десятичных приближений дроби $\frac{7}{11}$, взятых с недостатком с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.;

б) десятичных приближений числа $\sqrt{5} - \sqrt{2}$, взятых с недостатком с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.?

**646.** Докажите, что является монотонной и ограниченной последовательность $(a_n)$, если:

а) $a_n = \frac{n+3}{n+6}$; б) $a_n = \frac{2n+2}{2n+1}$.

Укажите два каких-либо числа, являющихся соответственно нижней и верхней границей последовательности.

**647.** Докажите, что последовательность $(b_n)$, где

а) $b_n = 1{,}5n - 6$; б) $b_n = n^2 - 4n$,

является ограниченной снизу и неограниченной сверху. Укажите номер, начиная с которого члены последовательности больше 140; больше 2000.

**648.** Докажите, что последовательность $(c_n)$, где:

а) $c_n = 27 - 2{,}5n$; б) $c_n = 36n - n^2$,

является ограниченной сверху и неограниченной снизу. Укажите номер, начиная с которого члены последовательности меньше 20; меньше $-200$.

**649.** Является ли ограниченной последовательность $(a_n)$, если:

а) $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 6^n$; г) $a_n = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$;

б) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+5}$; д) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{n+1}$;

в) $a_n = \frac{n}{4n+1}$; е) $a_n = \frac{(-1)^n - (-1)^{n+1}}{n}$?

**650.** Является ли ограниченной последовательность $(x_n)$, если

$$x_n = \begin{cases} \left(-\frac{1}{4}\right)^n & \text{при нечетном } n, \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{при четном } n? \end{cases}$$

**651.** Укажите, если возможно, какой-либо промежуток $[a; b]$ на координатной прямой, которому принадлежат все точки, изображающие члены последовательности $(c_n)$, если:

а) $c_n = \frac{3n+2}{2}$; б) $c_n = \frac{n+1}{n+8}$; в) $c_n = \left(-\frac{1}{6}\right)^n$.

**652.** Укажите, если возможно, какие-либо значения $a$ и $b$, при которых все члены последовательности изображаются на координатной плоскости точками, принадлежащими полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$, если:

а) $p_n = \frac{3n+2}{n+3}$; б) $p_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$; с) $p_n = n^2 - 6n$.

**653.** Известно, что $(a_n)$ и $(b_n)$ — ограниченные последовательности. Является ли ограниченной последовательность $(u_n)$, если:

а) $u_n = a_n + b_n$; б) $u_n = a_n - b_n$; в) $u_n = a_n b_n$?

## Упражнения для повторения

**654.** Докажите, что последовательность $(u_n)$ является убывающей, если:

а) $u_n = 12 \cdot (0{,}5)^n - 1$; б) $u_n = \frac{n+4}{n^2+2}$.

**655.** Постройте на координатной плоскости треугольник, который задает система

$$\begin{cases} y \leqslant x + 2, \\ y \leqslant -x + 2, \\ y \geqslant -5 \end{cases}$$

и определите его площадь.

## 30. Метод математической индукции

Пусть дана последовательность $(a_n)$, где $a_n = n(3n + 1)$. Докажем, что сумма $S_n$ первых $n$ членов этой последовательности $(a_n)$ может быть вычислена по формуле

$$S_n = n(n + 1)^2.$$

Легко убедиться, что эта формула верна при $n = 1$. Действительно, $S_1 = 1 \cdot (1 + 1)^2 = 1 \cdot 4$. С помощью вычислений можно показать, что формула верна также при $n = 2$; 3; 4 и т. д. Однако, как долго ни продолжали бы мы вычисления, они не дают оснований утверждать, что формула верна при любом натуральном $n$. Поэтому воспользуемся специальным методом рассуждений. Предположим, что формула верна при $n = k$, т. е.

$$S_k = k(k + 1)^2,$$

и докажем, что в этом случае она верна при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$S_{k+1} = (k + 1)(k + 2)^2.$$

Имеем

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}.$$

По формуле $n$-го члена последовательности $(a_n)$ находим, что $a_{k+1} = (k + 1)(3k + 3 + 1)$, т. е. $a_{k+1} = (k + 1)(3k + 4)$. Значит,

$$S_{k+1} = k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4) =$$
$$= (k + 1)(k^2 + k + 3k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2,$$

т. е. формула верна при $n = k + 1$.

Из доказанного следует, что так как формула $S_n = n(n + 1)^2$ верна при $n = 1$ (в этом мы убедились с помощью вычислений), то она верна при $n = 2$; из того, что формула верна при $n = 2$, следует, что она верна при $n = 3$; так как формула верна при $n = 3$, то она верна при $n = 4$ и т. д. Ясно, что, строя такую цепочку рассуждений, мы в конце концов дойдем до любого натурального числа $n$. Таким образом, доказано, что формула $S_n = n(n + 1)^2$ верна при любом $n$.

Примененный нами метод доказательства называется *методом математической индукции*. Он основан на *принципе математической индукции*, который состоит в следующем:

**утверждение о том, что некоторый факт имеет место при любом натуральном $n$, верно, если выполняются два условия:**
**а) утверждение верно при $n = 1$;**
**б) из справедливости утверждения при $n = k$ следует его справедливость при $n = k + 1$.**

В строгой теории натуральных чисел принцип математической индукции принимается за аксиому.

Доказательство некоторого утверждения методом математической индукции состоит из двух частей. Сначала проверяют его справедливость при $n = 1$. Эту часть называют *базисом индукции*. Затем, предположив, что утверждение верно при $n = k$, доказывают, что тогда оно верно и при $n = k + 1$. Эту часть называют *индуктивным шагом*.

Заметим, что иногда приходится доказывать справедливость некоторого утверждения при любом натуральном $n$, большем или равном $p$. В таком случае достаточно проверить, что оно верно при $n = p$, и показать, что из справедливости этого утверждения при $n = k$, где $k \geqslant p$, следует его справедливость при $n = k + 1$.

Приведем примеры применения метода математической индукции.

Пример 1. Зададим формулой $n$-го числа последовательность $(a_n)$, если известно, что $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 3$.

Вычислим первые несколько членов этой последовательности:

$$4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots .$$

Можно предположить, что последовательность $(a_n)$ задается формулой $a_n = (n + 1)^2$. Докажем справедливость этого утверждения, пользуясь методом математической индукции.

Для $n = 1$ формула верна. Допустим, что она верна для $n = k$, т. е. $a_k = (k + 1)^2$, и докажем, что она верна для $n = k + 1$, т. е. $a_{k+1} = (k + 2)^2$.

По условию $a_{k+1} = a_k + 2k + 3$. Заменив $a_k$ на $(k + 1)^2$, получим, что

$$a_{k+1} = (k + 1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = (k + 2)^2.$$

Утверждение доказано, т. е. последовательность $(a_n)$ можно задать формулой $a_n = (n + 1)^2$.

Пример 2. Пусть $(b_n)$ — последовательность чисел Фибоначчи, т. е. $b_1 = b_2 = 1$, $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ при $n > 2$. Докажем, что эта последовательность обладает свойством

$$b_{n+1}^2 - b_n b_{n+2} = (-1)^n \text{ при любом } n.$$

Для $n = 1$ равенство верно, так как

$$b_2^2 - b_1 \cdot b_3 = 1 - 1 \cdot 2 = (-1)^1.$$

Допустим, что равенство верно для $n = k$, т. е.

$$b_{k+1}^2 - b_k b_{k+2} = (-1)^k.$$

Докажем, что тогда оно верно для $n = k + 1$ т. е.

$$b_{k+2}^2 - b_{k+1} b_{k+3} = (-1)^{k+1}.$$

Имеем

$$b_{k+2}^2 - b_{k+1} \cdot b_{k+3} = b_{k+2}^2 - b_{k+1}(b_{k+2} + b_{k+1}) =$$
$$= b_{k+2}^2 - b_{k+1} b_{k+2} - b_{k+1}^2.$$

По предположению

$$b_{k+1}^2 = (-1)^k + b_k b_{k+2}.$$

Значит,

$$b_{k+2}^2 - b_{k+1} b_{k+3} = b_{k+2}^2 - b_{k+1} b_{k+2} - (-1)^k - b_k b_{k+2} =$$
$$= b_{k+2}^2 - b_{k+2}(b_{k+1} + b_k) - (-1)^k = b_{k+2}^2 - b_{k+2}^2 - (-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Утверждение доказано. Значит, последовательность чисел Фибоначчи обладает указанным свойством.

Пример 3. Докажем, что при $x > -1$ и любом натуральном $n$ верно неравенство

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Очевидно, что при $n = 1$ неравенство верно.

Допустим, что оно верно при $n = k$, т. е. допустим, что

$$(1 + x)^k \geqslant 1 + kx. \qquad (1)$$

Докажем, что в этом случае оно верно при $n = k + 1$, т. е.

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x.$$

Действительно, умножив обе части неравенства (1) на $1 + x$, где $1 + x > 0$, получим:

$$(1 + x)^k(1 + x) \geqslant (1 + kx)(1 + x),$$
$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + kx + x + kx^2.$$

Так как $kx^2 \geqslant 0$ при $x > -1$, то отсюда следует, что

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + kx + x, \text{ т. е.}$$
$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x.$$

В силу принципа математической индукции можно сделать вывод, что при $x > -1$ и любом натуральном $n$ верно неравенство $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$. Это неравенство называют *неравенством Бернулли* по имени известного швейцарского математика Якоба Бернулли (1654—1705 гг.), впервые доказавшего его.

Пример 4. Докажем, что любой член последовательности $(x_n)$, заданной формулой $x_n = 4 \cdot 6^n + 5n - 4$, делится на 25.

По формуле $n$-го члена находим, что $x_1 = 25$, и, значит, $x_1$ делится на 25. Допустим, что $x_k = 4 \cdot 6^k + 5k - 4$ делится на 25, и докажем, что в этом случае $x_{k+1} = 4 \cdot 6^{k+1} + 5(k + 1) - 4$ также делится на 25. Так как $x_k$ делится на 25, то $4 \cdot 6^k + 5k - 4 = 25p$, где $p \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда $4 \cdot 6^k = 25p - 5k + 4$. Тогда

$$x_{k+1} = 6(25p - 5k + 4) + 5(k + 1) - 4 = 150p - 25k + 25.$$

По свойству делимости суммы $x_{k+1}$ делится на 25. Утверждение доказано.

**656.** Докажите, что:

а) сумма первых $n$ натуральных чисел равна $\dfrac{n(n + 1)}{2}$;

б) сумма кубов первых $n$ натуральных чисел равна $\dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$.

**657.** Докажите формулу

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6},$$

которую вывел Архимед (287—212 г. до н. э.) для решения некоторых задач из геометрии и механики.

**658.** Выведите формулу суммы первых $n$ нечетных натуральных чисел.

**659.** Докажите, что при любом натуральном $n$:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{3}$;

б) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$;

в) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\dfrac{n(n + 1)}{2}$.

**660.** Докажите, что сумма $S_n$ первых $n$ членов последовательности

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{7^3}, \ldots, \frac{1}{7^n}, \ldots$$

может быть вычислена по формуле $S_n = \dfrac{7^n - 1}{6 \cdot 7^n}$.

**661.** Выведите формулу суммы первых $n$ членов последовательности

$$\frac{1}{1\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 7},\ \ldots,\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},\ \ldots.$$

**662.** Докажите, что при любом натуральном $n$:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

**663.** Последовательность $(a_n)$ задана рекуррентным соотношением $a_1=3$, $a_2=5$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$. Докажите, что эту последовательность можно задать формулой $a_n=2^n+1$.

**664.** Дана последовательность $(a_n)$, в которой $a_1=2$, $3a_{n+1}=$ $=3a_n+1$. Докажите, что эту последовательность можно задать формулой $a_n=2{,}5\cdot 3^{n-1}-0{,}5$.

**665.** Докажите, что если $(u_n)$ — последовательность чисел Фибоначчи, т. е. если $u_1=u_2=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ при $n>2$, то при любом $n$ верно равенство:

а) $u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_n\cdot u_{n+1}$.

б) $u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n-1}=u_{2n}$.

**666.** Даны последовательности $(a_n)$, где $a_n=2^{n+4}$, и $(b_n)$, где $b_n=(n+4)^2$. Докажите, что при любом $n$ верно неравенство $a_n>b_n$.

**667.** Даны последовательности $(c_n)$, где $c_n=2^{n+2}$, и $(x_n)$, где $x_n=2n+5$. Сравните $c_1$ и $x_1$, $c_2$ и $x_2$, $c_3$ и $x_3$, $c_4$ и $x_4$. Сформулируйте утверждение и проведите доказательство.

**668.** Докажите, что:

а) $2^n>2n+1$, если $n\in N$, $n\geqslant 3$;

б) $2^n>n^2$, если $n\in N$, $n\geqslant 5$.

**669.** Докажите, что $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ при любом $n$, большем 1.

**670.** Докажите, что любой член последовательности $(a_n)$ делится на 6, если:

а) $a_n=n^3+17n$; б) $a_n=n^3+35n$.

**671.** Докажите, что любой член последовательности $(b_n)$, где $b_n=4^n+15n-1$, делится на 9.

**672.** Докажите, что при делении на 18 любого члена последовательности $(a_n)$, заданной формулой $a_n=7^n+12n$, в остатке получается 1.

### Упражнения для повторения

**673.** Разложите на множители многочлен:
а) $x^3 - 4x^2 - x + 4$; б) $x^3 - x^2 - x - 2$.

**674.** Решите уравнение
$$\frac{x-2}{x} - \frac{x+7}{x+3} = \frac{x-5}{x-1} - \frac{x+4}{x+2}.$$

**675.** Докажите, что последовательность $(x_n)$ является возрастающей, если:
а) $x_n = \frac{3n-2}{n+1}$; б) $x_n = 2^n - n$.

**676.** Найдите область определения и область значений функции, заданной формулой:
а) $y = \frac{1}{x^2 - x}$; б) $y = \sqrt{x - x^2}$.

### Контрольные вопросы и задания

**1.** Укажите известные вам способы задания последовательностей. Приведите примеры.

**2.** Дайте определение возрастающей последовательности; убывающей последовательности. Приведите примеры.

**3.** Какая последовательность называется ограниченной сверху; ограниченной снизу; ограниченной? Приведите пример ограниченной последовательности и пример последовательности, которая не ограничена ни сверху, ни снизу.

**4.** Сформулируйте принцип математической индукции.

# § 11. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

## 31. Арифметическая прогрессия. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

Рассмотрим последовательность натуральных чисел, кратных 6, взятых в порядке возрастания:

$$6,\ 12,\ 18,\ \ldots,\ 6n,\ \ldots .$$

Каждый последующий член этой последовательности получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа. Последовательность такого вида называют *арифметической прогрессией* (от лат. *progressia* — движение вперед).

Определение. **Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.**

Если $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, то разность $a_{n+1} - a_n$ при любом $n$ равна одному и тому же числу. Это число называют *разностью прогрессии* и обозначают обычно буквой $d$ (начальной буквой английского слова *difference* — разность).

Очевидно, что при $d > 0$ арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, а при $d < 0$ — убывающей последовательностью. При $d = 0$ все члены арифметической прогрессии равны $a_1$.

Выведем формулу $n$-го члена арифметической прогрессии.

Из определения арифметической прогрессии следует, что:

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.$$

Аналогично найдем, что $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$ и т. д. Вообще, чтобы найти $a_n$, надо к $a_1$ прибавить произведение $(n - 1)d$, т. е.

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d.}$$

Справедливость этого утверждения можно доказать, пользуясь методом математической индукции.

Формулу $n$-го члена арифметической прогрессии можно записать иначе: $a_n = dn + (a_1 - d)$. Отсюда ясно, что арифметическая прогрессия является функцией $f(n)$, которая может быть задана формулой вида $y = kn + l$, где $k = d$, $l = a_1 - d$, т. е. является линейной функцией.

На координатной плоскости члены арифметической прогрессии $(a_n)$ изображаются точками с координатами $(1; a_1)$, $(2; a_2)$, $(3; a_3)$ и т. д., расположенными на прямой $y = kx + l$, где $k = d$, $l = a_1 - d$, на одинаковом расстоянии друг от друга. Например, члены арифметической прогрессии $-3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$ изображаются точками, расположенными на прямой $y = kx + l$, где $k = 2$, $l = -3 - 2 = -5$, т. е. на прямой $y = 2x - 5$ (рис. 91).

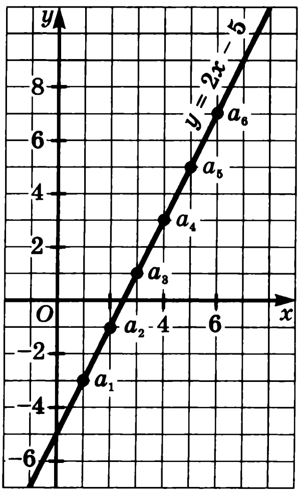



**Рис. 91**

Заметим, что если линейная функция задана на множестве натуральных чисел, то значения, которые она принимает при натуральных значениях аргумента, взятых в порядке возрастания, составляют арифметическую прогрессию. Действительно, в этом случае $a_{n+1} = (n + 1)k + l$, $a_n = nk + l$, и поэтому $a_{n+1} - a_n = k$.

Рассмотрим важное свойство арифметической прогрессии.

***Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов.***

Действительно, из определения арифметической прогрессии вытекает, что

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad a_{n+1} - a_n = d.$$

Значит,

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Верно и обратное: если в последовательности каждый член, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов, то последовательность $(a_n)$ — арифметическая прогрессия.

В самом деле, из равенства

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

получаем

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \text{ при } n \geqslant 2.$$

Следовательно, разность между предыдущим и последующим членами остается постоянной, а это означает, что $(a_n)$ — арифметическая прогрессия.

Таким образом, доказано свойство, выражающее необходимое и достаточное условие того, что последовательность является арифметической прогрессией:

***числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов.***

Это свойство называют *характеристическим свойством* арифметической прогрессии.

Приведем примеры использования рассмотренных понятий и свойств.

Пример 1. Известно, что $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, в которой $a_{m-n} = 48{,}5$ и $a_{m+n} = 83{,}5$. Найдем $a_m$.

Из определения арифметической прогрессии следует, что $a_{m+n} = a_m + dn$, $a_{m-n} = a_m - dn$, где $d$ — разность прогрессии. Отсюда

$$a_{m+n} + a_{m-n} = a_m + dn + a_m - dn, \text{ т. е.}$$

$$a_m = \frac{a_{m+n} + a_{m-n}}{2}.$$

Значит, $a_m = \dfrac{48{,}5 + 83{,}5}{2} = 66.$

Пример 2. Докажем, что если $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, все члены которой являются положительными числами, то верно равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

Обозначим рассматриваемую сумму $S_n$. Освобождаясь в каждой дроби от иррациональности в знаменателе, получим

$$S_n = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d},$$

где $d$ — разность прогрессии.

Освобождаясь теперь от иррациональности в числителе полученной дроби, найдем, что

$$S_n = \frac{a_n - a_1}{d\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}\right)} = \frac{a_1 + d(n-1) - a_1}{d\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}\right)} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

Пример 3. Докажем, что если числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$, $\dfrac{1}{b+a}$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, то числа $a^2$, $b^2$, $c^2$ также являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

Из характеристического свойства арифметической прогрессии следует, что

$$\frac{1}{a+c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}\right).$$

Отсюда

$$2(b + c)(a + b) = (a + c)(a + b) + (a + c)(b + c),$$

$$2ab + 2ac + 2b^2 + 2bc = a^2 + ac + ab + bc + ab + bc + ac + c^2, \text{ т. е.}$$

$$2b^2 = a^2 + c^2,$$

$$b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}.$$

В силу характеристического свойства арифметической прогрессии полученное равенство означает, что числа $a^2$, $b^2$, $c^2$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

**677.** Известно, что $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, разность которой равна $d$. Является ли арифметической прогрессией последовательность, и если да, то какова ее разность:

а) $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_2n, \ldots$;

б) $-a_1, -a_2, -a_3, \ldots, -a_n, \ldots$;

в) $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_n^2, \ldots$;

г) $na_1, na_2, na_3, \ldots, na_n, \ldots$;

д) $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3, \ldots, a_n + n, \ldots$;

е) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$?

**678.** Найдите члены арифметической прогрессии, обозначенные буквами

$$a_1, a_2, 6, a_4, a_5, 48, a_7, \ldots .$$

**679.** Могут ли составлять арифметическую прогрессию:

а) длины сторон и периметр треугольника;

б) длины сторон прямоугольного треугольника?

**680.** Число 17 встречается в каждой из арифметических прогрессий $(a_n)$ и $(b_n)$:

$$5, 8, 11, 14, 17, \ldots, a_n, \ldots,$$

$$9, 17, 25, 33, \ldots, b_n, \ldots .$$

Укажите следующее число, которое встречается в обеих прогрессиях, и место, на котором оно записано в каждой из них.

**681.** Известно, что $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, в которой $a_1 = 6$, $d = 8$, а $(b_n)$ — арифметическая прогрессия, в которой $b_1 = 2$, $d = 3$. Каждая из последовательностей содержит по 40 членов. Найдите все одинаковые члены последовательностей.

**682.** Между числами 14 и 2 вставьте семь чисел, которые вместе с данными числами составят арифметическую прогрессию.

**683.** Между числами 2 и 42 вставьте несколько чисел, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию, если известно, что сумма первого, второго и последнего из вставленных чисел равна 56.

**684.** Могут ли быть членами одной арифметической прогрессии (не обязательно последовательными) числа:

а) $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{128}$; б) 3, $\sqrt{5}$, 7?

**685.** Является ли арифметической прогрессией последовательность $(a_n)$, заданная формулой:

а) $a_n = 1 - 0{,}6n$; б) $a_n = \frac{n-4}{7}$; в) $a_n = n(n+2)$?

При положительном ответе укажите разность прогрессии.

**686.** В арифметической прогрессии второй член равен 4,8, а шестой — 10,8. Укажите номера членов прогрессии, принадлежащих промежутку (20; 50).

**687.** Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия

$$-26, -24{,}5, -23, \dots ?$$

**688.** В арифметической прогрессии $\frac{a_5}{a_3} = \frac{7}{4}$. Докажите, что $a_7 = 4a_2$.

**689.** Сумма первых трех членов убывающей арифметической прогрессии равна 9, а сумма их квадратов равна 99. Найдите пятый член прогрессии.

**690.** Известно, что $(a_n)$ — возрастающая арифметическая прогрессия, в которой $a_1 \cdot a_4 = 45$, $a_2 \cdot a_3 = 77$. Найдите первые четыре члена этой прогрессии.

**691.** Изобразите на координатной плоскости первые шесть членов арифметической прогрессии −3, −1,5; 0, ... . Напишите уравнение прямой, на которой лежат построенные точки.

**692.** Последовательность $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, в которой $a_2 + a_5 = 6$, $a_3 \cdot a_4 = -11{,}25$. Найдите первые шесть членов прогрессии, изобразите их точками на координатной плоскости и напишите уравнение прямой, на которой лежат эти точки.

**693.** При каких значениях $x$ числа $x^2 - 3$, $2x^2 + 1$ и $x^4 + 1$, взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

**694.** Докажите, что если числа $a$, $b$, $c$ — три последовательных члена арифметической прогрессии, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ также являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

## Упражнения для повторения

**695.** Из поселка в город, расстояние до которого равно 10,5 км, вышел пешеход. Через 30 мин вслед за ним отправился из поселка со скоростью 4 км/ч другой пешеход, который догнал первого, передал ему забытый пакет и тотчас повернул обратно. Найдите скорость первого пешехода, если известно, что он пришел в город в тот момент, когда второй вернулся в поселок.

**696.** Решите неравенство:

а) $\dfrac{x^3 - 8x^2 - x + 8}{x + 6} > 0$;  б) $\dfrac{x^5 - x^4 + x - 1}{3x + 4} < 0$.

**697.** В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = |x^2 - 2x - 15|$;  б) $y = x^2 - 4|x| - 5$?

## 32. Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии

Выведем формулу суммы первых $n$ членов арифметической прогрессии. Для этого предварительно докажем свойство арифметической прогрессии:

***если $a_n$ — арифметическая прогрессия и $p + m = k + l$, где $p$, $m$, $k$, $l$ — натуральные числа, то $a_p + a_m = a_k + a_l$.***

Действительно, пусть $d$ — разность прогрессии, тогда

$$a_p + a_m = a_1 + d(p - 1) + a_1 + d(m - 1) = 2a_1 + d(p + m - 2),$$

$$a_k + a_l = a_1 + d(k - 1) + a_1 + d(l - 1) = 2a_1 + d(k + l - 2).$$

Так как $p + m = k + l$, то $a_p + a_m = a_k + a_l$.

Из доказанного свойства следует, что в конечной арифметической прогрессии сумма членов, равноудаленных от крайних членов, равна сумме крайних членов. Возможно, что с этим свойством связана история, которую рассказывают об известном немецком математике Карле Гауссе (1777—1855 гг.). Когда ученики третьего класса получили задание — найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно, маленький Карл, к удивлению учителя, моментально подошел с готовым ответом: 5050. Можно предположить, что он заметил, что каждая из сумм 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98 и т. д. равна 101, а таких сумм всего 50.

Теперь можно вывести формулу суммы первых $n$ членов арифметической прогрессии.

Обозначим через $S_n$ сумму первых $n$ членов арифметической прогрессии $(a_n)$ и выпишем два равенства, располагая в первом случае члены прогрессии в порядке возрастания их номеров, а во втором — в порядке убывания номеров:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Складывая эти равенства и группируя попарно слагаемые, получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой из скобок записана сумма, равная сумме $a_1 + a_n$. Всего таких скобок $n$. Следовательно,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Мы получили формулу суммы первых $n$ членов арифметической прогрессии.

Формулу суммы первых $n$ членов арифметической прогрессии $(a_n)$ можно записать в другом виде. Выразив $a_n$ через $a_1$ и $d$, где $d$ — разность прогрессии, получим:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Приведем примеры применения формулы суммы первых $n$ членов арифметической прогрессии.

Пример 1. Найдем сумму всех двузначных чисел, дающих при делении на 6 остаток 1.

Двузначные числа, дающие при делении на 6 остаток 1, образуют арифметическую прогрессию

$$13,\ 19,\ \ldots,\ 97,$$

разность $d$ которой равна 6.

Определим сначала число членов прогрессии. По формуле $n$-го члена находим, что

$$97 = 13 + 6(n - 1),$$
$$6n = 90,$$
$$n = 15.$$

По формуле суммы первых $n$ членов арифметической прогрессии находим, что

$$S_{15} = \frac{13 + 97}{2} \cdot 15 = 825.$$

Пример 2. Докажем, что если в арифметической прогрессии сумма первых $p$ членов равна сумме первых $m$ членов, где $m \neq p$, то сумма первых $p + m$ членов равна нулю.

Пусть $a_1$ — первый член прогрессии, $d$ — разность прогрессии. Тогда по формуле суммы первых $n$ членов арифметической прогрессии:

$$S_p = \frac{2a_1 + d(p - 1)}{2} \cdot p, \quad S_m = \frac{2a_1 + d(m - 1)}{2} \cdot m,$$

$$S_{p+m} = \frac{2a_1 + d(p + m - 1)}{2} \cdot (p + m).$$

По условию $S_p = S_m$, т. е.

$$\frac{2a_1 + d(p - 1)}{2} \cdot p = \frac{2a_1 + d(m - 1)}{2} \cdot m.$$

Отсюда

$$2a_1p + dp(p - 1) = 2a_1m + dm(m - 1),$$
$$2a_1(p - m) + d(p^2 - p - m^2 + m) = 0,$$
$$2a_1(p - m) + d(p - m)(p + m - 1) = 0,$$
$$(p - m)[2a_1 + d(p + m - 1)] = 0.$$

Так как по условию задачи $p \neq m$, то из этого равенства следует, что

$$2a_1 + d(p + m - 1) = 0,$$

а это означает, что $S_{p+m} = 0$.

**698.** При свободном падении тело в первую секунду проходит 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние пройдет свободно падающее тело за 9 секунд?

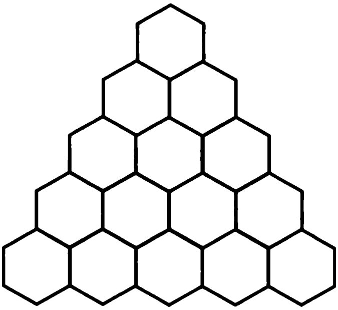


Рис. 92

**699.** Фигура составлена из правильных шестиугольников так, что в верхнем ряду находится один шестиугольник, а в каждом следующем ряду на один шестиугольник больше, чем в предыдущем (рис. 92). Известно, что для составления фигуры потребовалось 45 шестиугольников. В скольких рядах размещены шестиугольники?

**700.** Найдите сумму:
а) всех двузначных натуральных чисел;
б) всех двузначных чисел, кратных 3;
в) всех целых чисел от $-27$ до 5 включительно;
г) всех целых чисел, больших $-25$, но меньших 25, дающих при делении на 5 остаток 1.

**701.** Задайте формулой $n$-го члена последовательность:
а) треугольных чисел; б) пятиугольных чисел.

**702.** Проверьте правильность утверждения Диофанта (III в. н. э.): если $a$ — некоторое треугольное число, то $8a + 1$ — квадратное число.

**703.** Пользуясь методом математической индукции, докажите, что если $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, то

$$a_n = a_1 + d(n - 1),\ S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

**704.** В арифметической прогрессии $(a_n)$ найдите:
а) $n$ и $a_n$, если $a_1 = -12$, $d = 1{,}5$, $S_n = 13{,}5$;
б) $n$ и $a_1$, если $a_n = -7{,}5$, $d = -2{,}5$, $S_n = 75$.

**705.** Найдите сумму членов арифметической прогрессии:
а) $-3{,}2$; $-2{,}4$; ... , не превосходящих 24;
б) $12{,}5$; $11{,}9$; ... , больших, чем $-1$.

**706.** Найдите $x$, зная, что слагаемые в левой части уравнения составляют арифметическую прогрессию:
а) $2 + 8 + 14 + ... + x = 184$; б) $5 + 8 + 11 + ... + x = 185$.

**707.** Найдите $x$ из уравнения, если известно, что показатели степеней множителей составляют арифметическую прогрессию:
а) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot ... \cdot 2^{2x} = (0{,}25)^{-36}$;
б) $5^3 \cdot 5^6 \cdot 5^9 \cdot ... \cdot 5^{3x} = (0{,}008)^{-55}$.

**708.** В арифметической прогрессии $(a_n)$ найдите:
а) $S_{16}$, если $a_3 + a_{14} = 12$; б) $S_{20}$, если $a_4 + a_{17} = 9$.

**709.** Известно, что $(x_n)$ — арифметическая прогрессия, в которой $x_1 = 7$, $x_{25} = 63$. Найдите $x_{13}$ и сумму членов с тринадцатого по двадцать пятый включительно.

**710.** В арифметической прогрессии с нечетным числом членов средний член равен 17, а сумма всех слагаемых на 112 больше их числа. Найдите число членов прогрессии.

**711.** Последовательность $(a_n)$ задана формулой $a_n = 2{,}5n + 2$. Найдите сумму членов последовательности с одиннадцатого по двадцатый включительно.

**712.** Является ли арифметической прогрессией последовательность $(c_n)$, сумма первых $n$ членов которой вычисляется по формуле:
а) $S_n = 3n^2 - n$; б) $S_n = n - n^2$; в) $S_n = n^2 + 2n$?

При положительном ответе укажите разность прогрессии.

**713.** В арифметической прогрессии $(a_n)$ найдите $a_1$ и $d$, если:
а) $\frac{a_3}{a_6} = 2$, $S_8 = 72$; б) $\frac{a_6}{a_3} = 1{,}5$, $S_6 = 156$.

**714.** В арифметической прогрессии $(a_n)$ найдите $a_5$, если:
а) $S_4 = 22$, $S_8 = 92$; б) $S_3 = -39$, $S_7 = -21$.

**715.** В арифметической прогрессии, содержащей 12 членов, сумма членов равна 168. Найдите первый член и разность прогрессии, если известно, что сумма членов с четными номерами относится к сумме членов с нечетными номерами как 13 : 15.

**716.** Известно, что $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, в которой $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 93$, $S_6 = 57$. Найдите $a_1$ и $d$.

**717.** В арифметической прогрессии $(a_n)$ найдите $a_1$ и $d$, если известно, что $a_1a_2a_3 = 280$, $S_5 = 50$.

**718.** Найдите число $n$ членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если:

а) $\begin{cases} a_3 + a_5 = 36, \\ S_6 = 93, \\ a_n + a_1 + a_6 = 89; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_3 = 21, \\ S_4 = 36, \\ S_n = 300. \end{cases}$

**719.** Известно, что $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, $(S_n)$ — последовательность сумм первых $n$ ее членов. Докажите, что если члены последовательности $(a_n)$ изображаются точками, принадлежащими прямой $y = 2x - 3$, то члены последовательности $(S_n)$ изображаются точками, принадлежащими параболе $y = x^2 - 2x$.

### Упражнения для повторения

**720.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy + 2x^2 + 2y^2 = 120, \\ xy - x^2 - y^2 = -39; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 4xy = 5, \\ y^2 - 6xy = 31. \end{cases}$

**721.** При каком условии корни уравнения

$$(1 - a^2)x^2 + 2ax - 1 = 0$$

принадлежат промежутку (0; 1)?

**722.** Найдите промежутки монотонности функции $y = \dfrac{x + 10}{x - 5}$ и определите характер монотонности функции в каждом из них.

### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение арифметической прогрессии. Выведите формулу $n$-го члена.

2. Сформулируйте и докажите характеристическое свойство арифметической прогрессии.

3. Выведите формулу суммы первых $n$ членов арифметической прогрессии. Для арифметической прогрессии найдите сумму членов с шестнадцатого по двадцать шестой включительно, если $a_1 = 2{,}7$, $a_{12} = 9{,}3$.

# § 12. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

## 33. Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

В последовательности $(b_n)$ десятичных дробей

$$0{,}5,\ 0{,}05,\ 0{,}005,\ 0{,}0005,\ \ldots,$$

где $b_n = 5 \cdot (0{,}1)^n$, каждый последующий член получается из предыдущего умножением на одно и то же число, равное 0,1. Эта последовательность является примером *геометрической прогрессии.*

Определение. **Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число.**

Если $(b_n)$ — геометрическая прогрессия, то частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, где $b_n \neq 0$, при любом $n$ равно одному и тому же числу. Это число называют *знаменателем геометрической* прогрессии и обозначают обычно буквой $q$ (начальная буква английского слова *quotient* — частное). Очевидно, что $q \neq 0$.

При $q > 0$ все члены геометрической прогрессии имеют тот же знак, что и первый член, а при $q < 0$ знаки членов геометрической прогрессии чередуются.

Очевидно, что если $b_1 > 0$, то при $q > 1$ геометрическая прогрессия $(b_n)$ является возрастающей последовательностью, а при $0 < q < 1$ — убывающей. Если $b_1 < 0$, то при $q > 1$ геометрическая прогрессия $(b_n)$ является убывающей последовательностью, а при $0 < q < 1$ — возрастающей.

Выведем формулу $n$-го члена геометрической прогрессии.

Из определения геометрической прогрессии следует, что:

$$\begin{aligned}
&b_2 = b_1q,\\
&b_3 = b_2q = (b_1q)q = b_1q^2,\\
&b_4 = b_3q = (b_1q^2)q = b_1q^3,\\
&b_5 = b_4q = (b_1q^3)q = b_1q^4.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом найдем, что $b_6 = b_1q^5$, $b_7 = b_1q^6$ и т. д. Вообще чтобы найти $b_n$, надо $b_1$ умножить на $q^{n-1}$, т. е.

$$b_n = b_1q^{n-1}.$$

Справедливость этого утверждения можно доказать, пользуясь методом математической индукции.

Формулу $n$-го члена геометрической прогрессии можно записать в виде $b_n = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$. Отсюда ясно, что геометрическая прогрессия представляет собой последовательность $(b_n)$, которая задается формулой вида $b_n = ca^n$, где $c$ и $a$ — некоторые числа, не равные нулю. Верно и обратное: если последовательность задана формулой вида $b_n = ca^n$, где $c$ и $a$ — некоторые отличные от нуля числа, то эта последовательность является геометрической прогрессией. Действительно, из равенств $b_n = ca^n$ и $b_{n+1} = ca^{n+1}$ получаем $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{ca^{n+1}}{ca^n} = a$.

Значит, последовательность $(b_n)$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $a$.

Рассмотрим теперь свойство геометрической прогрессии.

Из определения геометрической прогрессии следует, что если $(b_n)$ — геометрическая прогрессия, то $b_n = b_{n-1}q$, $b_{n+1} = b_nq$, причем числа $b_{n-1}$, $b_n$, $b_{n+1}$ отличны от нуля. Значит,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Отсюда

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Таким образом, мы установили следующее свойство: ***если последовательность является геометрической прогрессией, то квадрат любого ее члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов.***

Справедливо и обратное: если последовательность $(b_n)$ чисел, отличных от нуля, обладает тем свойством, что $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ при любом $n \geqslant 2$, то эта последовательность — геометрическая прогрессия.

Действительно, если $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ при любом $n$, причем числа $b_{n-1}$, $b_n$, $b_{n+1}$ отличны от нуля, то $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, т. е. отношение любого члена последовательности $(b_n)$ к предыдущему члену равно одному и тому же числу, а это означает, что $(b_n)$ — геометрическая прогрессия.

Итак, рассмотренное свойство выражает необходимое и достаточное условие того, что последовательность отличных от нуля чисел представляет собой геометрическую прогрессию, т. е. является *характеристическим свойством* геометрической прогрессии.

Так как равенство

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1},$$

где $b_{n-1}$, $b_n$, $b_{n+1}$ — отличные от нуля числа, равносильно равенству

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}},$$

то характеристическое свойство геометрической прогрессии можно сформулировать так:

***числовая последовательность, члены которой отличны от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда модуль любого ее члена, начиная со второго, есть среднее геометрическое предыдущего и последующего членов.***

Этим и объясняется название «геометрическая прогрессия».

Докажем теперь справедливость еще одного свойства:

***если $(b_n)$ — геометрическая прогрессия и $p + m = k + l$, где $p, m, k, l$ — натуральные числа, то $b_p \cdot b_m = b_k \cdot b_l$.***

Действительно, пусть $q$ — знаменатель прогрессии, тогда

$$b_p \cdot b_m = b_1q^{p-1} \cdot b_1q^{m-1} = b_1^2\,q^{p+m-2},$$
$$b_k \cdot b_l = b_1q^{k-1} \cdot b_1q^{l-1} = b_1^2\,q^{k+l-2}.$$

Так как $p + m = k + l$, то $b_p \cdot b_m = b_k \cdot b_l$.

Покажем на примерах, как используются рассмотренные понятия и свойства.

Пример 1. В арифметической и геометрической прогрессиях все члены положительны и первый член каждой из прогрессий равен 5. Второй член арифметической прогрессии на 2 больше второго члена геометрической прогрессии, а третий член арифметической прогрессии на 16 меньше третьего члена геометрической прогрессии. Найдем первые три члена каждой прогрессии.

Пусть разность арифметической прогрессии равна $d$. Тогда первые три ее члена равны 5, $5 + d$, $5 + 2d$. В геометрической прогрессии первый член равен 5, а второй — равен $(5 + d) - 2$, т. е. $3 + d$. Значит, знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{3+d}{5}$, а ее третий член равен $(3 + d) \cdot \frac{3+d}{5}$, т. е. $\frac{(3+d)^2}{5}$. По условию третий член арифметической прогрессии на 16 меньше третьего члена геометрической прогрессии, т. е.

$$\frac{(3+d)^2}{5} - (5 + 2d) = 16.$$

Решив полученное уравнение, найдем, что оно имеет два корня: $-8$ и 12. Так как в последовательностях все члены положительны, то условию задачи удовлетворяет только второй корень.

Итак, искомые числа 5, 17, 29 и 5, 15, 45.

Пример 2. Найдем разность убывающей арифметической прогрессии, если известно, что первый ее член равен 3, а квадраты первых трех членов составляют геометрическую прогрессию.

Пусть разность арифметической прогрессии равна $d$. Тогда первые три ее члена равны 3, $3 + d$, $3 + 2d$. По условию числа $3^2$, $(3 + d)^2$, $(3 + 2d)^2$ составляют геометрическую прогрессию. По свойству геометрической прогрессии

$$(3 + d)^4 = 9(3 + 2d)^2.$$

Решая составленное уравнение, найдем, что

$$(3 + d)^4 - 9(3 + 2d)^2 = 0,$$
$$(9 + 6d + d^2 - 9 - 6d)(9 + 6d + d^2 + 9 + 6d) = 0,$$
$$d^2(d^2 + 12d + 18) = 0.$$

Отсюда

$$d_1 = 0,\ d_2 = -6 - \sqrt{18},\ d_3 = -6 + \sqrt{18}.$$

По условию задачи арифметическая прогрессия является убывающей. Значит, ее разность равна $-6 - \sqrt{18}$ или $-6 + \sqrt{18}$.

Пример 3. Докажем, что если $(x_n)$ — геометрическая прогрессия, в которой $x_n = a$, $x_{2n} = b$, $x_{4n} = c$, то

$$b(b^2 - a^2) = a^2(c - b).$$

Пусть $q$ — знаменатель геометрической прогрессии. Из определения геометрической прогрессии следует, что $x_{2n} = x_n q^n$, $x_{4n} = x_{2n}q^{2n}$, т. е. $b = aq^n$, $c = bq^{2n}$. Отсюда

$$\frac{b}{a} = q^n,\quad \frac{c}{b} = q^{2n}.$$

Значит,

$$\frac{c}{b} = \left(\frac{b}{a}\right)^2,\ \text{т. е. } b^3 = a^2c.$$

Вычитая из обеих частей равенства $b^3 = a^2c$ по $a^2b$, получим:

$$b^3 - a^2b = a^2c - a^2b,$$
$$b(b^2 - a^2) = a^2(c - b),$$

что и требовалось доказать.

**723.** Последовательность $(b_n)$ — геометрическая прогрессия. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) $-b_1, -b_2, -b_3, \dots, -b_n, \dots$;

б) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \dots, \frac{1}{b_n}, \dots$;

в) $7b_1, 7b_2, 7b_3, \dots, 7b_n, \dots$;

г) $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2, \dots$;

д) $b_1, b_3, b_5, \dots, b_{2n-1}, \dots$?

**724.** В геометрической прогрессии $(b_n)$ найдите:

а) $b_5$, если $b_1 = 3\sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$;

б) $b_1$, если $b_6 = -\frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{2}$;

в) $q$, если $b_1 = 0{,}5$, $b_4 = 500$;

г) $b_1$ и $q$, если $b_2 = 4$, $b_4 = 1$.

**725.** Вкладчик решил положить в банк на год 50 тыс. рублей. Известно, что в одном банке вклад возрастает за год на 25%, а в другом он возрастает ежемесячно на 2% от накопленной суммы. В каком из банков доход будет больше и на сколько?

**726.** Встретится ли среди членов геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... число:

а) 54; б) 486; в) 72; г) 576?

При положительном ответе укажите номер члена.

**727.** Начиная с какого номера члены геометрической прогрессии

а) 32, 16, 8, ... меньше 0,01;

б) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, ... больше 50?

**728.** Между числами 36 и $2\frac{1}{4}$ вставьте три числа так, чтобы вместе с данными числами они составили геометрическую прогрессию.

**729.** В геометрической прогрессии третий член равен 15, а шестой — 405. Найдите члены прогрессии, заключенные между ними.

**730.** В геометрической прогрессии $a_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$. Найдите, чему равно $a_9$ и произведение первых тринадцати членов.

**731.** При каких значениях $x$ числа

а) $x$, $\sqrt{x}$, $x - 5$; б) $x$, $\sqrt{x - 8}$, $\frac{x}{36}$,

взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии?

**732.** Является ли геометрической прогрессией последовательность $(c_n)$, заданная формулой:

а) $c_n = 3^n$; б) $c_n = -1{,}5 \cdot 2^n$; в) $c_n = 2^n + 5^n$?

При положительном ответе укажите первый член и знаменатель прогрессии.

**733.** Могут ли числа 12, 28 и 35 быть членами одной геометрической прогрессии (необязательно соседними)?

**734.** Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника составлять геометрическую прогрессию? При положительном ответе укажите знаменатель прогрессии.

**735.** В геометрической прогрессии $(b_n)$ найдите $b_m$, если $b_{m+n} = b_{m-n} = 13$.

**736.** Найдите три положительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, если известно, что их сумма равна 42, а сумма обратных им чисел равна $\frac{21}{32}$.

**737.** В геометрической прогрессии с положительными числами $S_2 = 21$, $S_3 = 49$. Найдите седьмой член этой прогрессии.

**738.** Четыре числа составляют убывающую геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если известно, что сумма крайних членов равна 135, а сумма средних членов равна 90.

**739.** Найдите четыре числа, составляющие возрастающую геометрическую прогрессию, если известно, что разность между четвертым и первым членами равна 744, а разность между третьим и вторым членами равна 120.

**740.** Геометрическая прогрессия состоит из 12 членов, являющихся положительными числами. Сумма первых четырех членов равна 7680, а сумма четырех следующих равна 480. Найдите сумму последних четырех членов этой последовательности.

**741.** Докажите, что если последовательность $(b_n)$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q$, не равным 1, то последовательность $(x_n)$, где $x_n = b_{n+1} - b_n$, также является геометрической прогрессией со знаменателем $q$.

**742.** Известно, что числа $a$, $b$, $c$ образуют геометрическую прогрессию, а числа $a + b$, $b + c$, $c + a$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

**743.** Докажите, что если числа $a$, $b$, $c$ образуют геометрическую прогрессию, то:

а) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$;

б) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

**744.** Найдите четыре целых числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три составляют арифметическую прогрессию, если известно, что сумма двух средних чисел равна 12, а сумма двух крайних чисел равна 14.

**745.** Три числа, дающие в сумме 39, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Если из первого и второго вычесть по 1, а к третьему прибавить 5, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

**746.** Три числа, сумма которых равна 65, составляют геометрическую прогрессию. Если из первого числа вычесть 25, второе оставить без изменения, а к третьему прибавить 5, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

**747.** В арифметической прогрессии $(a_n)$ и геометрической прогрессии $(b_n)$, все члены которых положительны, $a_1 = b_1 = 2$. Найдите два последующих члена каждой прогрессии, если известно, что их вторые члены совпадают, а третий член арифметической прогрессии на 2 меньше третьего члена геометрической прогрессии.

## Упражнения для повторения

**748.** Является ли ограниченной функция $y = \frac{6}{x^2 + 1}$? Укажите наименьшее и наибольшее значения функции, если они существуют.

**749.** Найдите нули и интервалы знакопостоянства функции $y = x^3 - 7x + 6$.

**750.** Решите неравенство:

а) $\left|\,|3 - x| - 2\,\right| < 4$; б) $\left|\,|2 + x| + 1\,\right| > 3$.

## 34. Сумма первых *n* членов геометрической прогрессии

Выведем формулу суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии.

Пусть $(b_n)$ — геометрическая прогрессия, $S_n$ — сумма первых $n$ ее членов, т. е.

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Умножив обе части равенства (1) на $q$, получим

$$S_nq = b_1q + b_2q + \dots + b_{n-1}q + b_nq.$$

Из определения геометрической прогрессии следует, что

$$b_1q = b_2,\ b_2q = b_3,\ \dots,\ b_{n-1}q = b_n.$$

Значит, полученное равенство можно записать так:

$$S_nq = b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_nq. \qquad (2)$$

Вычитая почленно из равенства (2) равенство (1) и приводя подобные члены, получим:

$$S_nq - S_n = b_nq - b_1,$$
$$S_n(q - 1) = b_nq - b_1.$$

Значит,

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1.$$

Мы получили формулу суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$.

Формулу суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии можно записать в другом виде, заменив $b_n$ на $b_1q^{n-1}$. Получим

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1.$$

Заметим, что при $q = 1$ все члены геометрической прогрессии равны $b_1$ и $S_n = nb_1$.

С вычислением суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии связана известная легенда. Рассказывают, что индийский принц решил наградить изобретателя шахмат. Изобретатель попросил положить на первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зерно, на вторую — 2 зерна, на третью — 4 зерна и т. д. Каково же было удивление принца, когда он узнал, что такую скромную, на его взгляд, просьбу невозможно выполнить. Действительно, общее число зерен равно

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Такого количества зерен пшеницы еще не было выращено за все годы существования земледелия на нашей планете.

Приведем другие примеры применения формулы суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии.

Пример 1. Найдем сумму первых десяти членов геометрической прогрессии $(b_n)$, в которой

$$\frac{b_1 + b_3}{b_2 + b_4} = 2, \ S_5 = 279.$$

По условию $\frac{b_1 + b_1q^2}{b_1q + b_1q^3} = 2$. Отсюда $\frac{1}{q} = 2$, $q = \frac{1}{2}$.

Зная, что $S_5 = 279$, найдем $a_1$.

$$279 = \frac{a_1\left(\frac{1}{2^5} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}, \ a_1 = 144.$$

Вычислим теперь $S_{10}$:

$$S_{10} = \frac{144\left(\frac{1}{2^{10}} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{144(1 - 1024)}{-\frac{1}{2} \cdot 1024} = \frac{144 \cdot 1023}{512} = \frac{9 \cdot 1023}{32} = 287\frac{23}{32}.$$

Пример 2. Пусть $(b_n)$ — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = S_n$, $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n} = S'_n$, $b_1 b_2 \ldots b_n = P_n$. Докажем, что $P_n^2 = \left(\frac{S_n}{S'_n}\right)^n$.

Пусть $q$ — знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$. Тогда последовательность $(c_n)$, где $c_n = \frac{1}{b_n}$, также является геометрической прогрессией, причем ее знаменатель равен $\frac{1}{q}$. По формуле суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии находим, что:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1},$$

$$S'_n = \frac{\frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{q} - \frac{1}{b_1}}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{(b_1 - b_n q)q}{b_1 b_n q(1 - q)} = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \cdot \frac{1}{b_1 b_n}.$$

Значит,

$$\frac{S_n}{S'_n} = b_1 b_n.$$

Воспользовавшись свойством произведения членов конечной геометрической прогрессии, равноудаленных от концов, найдем, что

$$P_n^2 = (b_1 b_2 \ldots b_n)^2 = (b_1 b_n)^n.$$

Значит,

$$P_n^2 = \left(\frac{S_n}{S'_n}\right)^n,$$

что и требовалось доказать.

**751.** Найдите сумму первых $n$ членов геометрической прогрессии $(a_n)$, если:

а) $a_1 = -27$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 6$;

б) $a_1 = \frac{1}{625}$, $q = -5$, $n = 5$;

в) $a_n = \frac{1}{108}$, $q = \frac{1}{6}$, $n = 5$;

г) $a_n = 3$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n = 6$.

**752.** Сколько членов геометрической прогрессии

$$6, 12, 24, \ldots$$

надо сложить, чтобы полученная сумма была:
а) равна 3066; б) больше 6000?

**753.** Пользуясь методом математической индукции, докажите, что если $(b_n)$ — геометрическая прогрессия, то

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \; S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

**754.** Найдите сумму, в которой слагаемые составляют геометрическую прогрессию:
а) $0{,}02 + 0{,}06 + 0{,}18 + \ldots + 43{,}74$;
б) $230{,}4 - 115{,}2 + 57{,}6 - \ldots + 0{,}9$.

**755.** Докажите, что при любом $n \in N$ сумма
а) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{4n-1}$ кратна 40;
б) $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{3n-1}$ кратна 31.

**756.** В геометрической прогрессии $(b_n)$ найдите:
а) $n$ и $b_n$, если $b_1 = 0{,}5$, $q = 2$, $S_n = 31{,}5$;
б) $n$ и $q$, если $b_1 = 9$, $b_n = \frac{1}{9}$, $S_n = 13\frac{5}{9}$;
в) $q$ и $b_3$, если $b_1 = 6{,}2$, $S_3 = 80{,}6$.

**757.** Известно, что $(b_n)$ — геометрическая прогрессия, в которой $\frac{b_4 - b_2}{b_3 - b_1} = 4$ и $S_4 = 340$. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

**758.** Найдите сумму первых шести членов последовательности $(c_n)$, если:
а) $c_n = (0{,}5)^n$; б) $c_n = -1{,}5 \cdot 2^n$; в) $c_n = 3^n + 1$.

**759.** В геометрической прогрессии $(a_n)$ найдите $a_1$, $q$ и $n$, если:
а) $\begin{cases} a_4 - a_2 = 0{,}6, \\ a_5 - a_3 = 1{,}2, \\ S_n = 12{,}7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_1 + a_3 = 5{,}2, \\ a_2 + a_4 = 1{,}04, \\ S_n = 6{,}24. \end{cases}$

**760.** Известно, что геометрическая прогрессия $(b_n)$ содержит $2n$ членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна $S_1$, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна $S_2$. Найдите знаменатель прогрессии.

**761.** Выведите формулу произведения первых $n$ членов геометрической прогрессии.

**762.** Найдите сумму:
а) $1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$;
б) $\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) + \ldots + \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)$.

**763.** В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, сумма первого и второго членов равна 48, а сумма третьего и четвертого членов равна 12. Найдите значение $n$, при котором $S_n = 63$.

**764.** Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 1,4, а их произведение равно 0,064. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

**765.** Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 10,5, а произведение их квадратов равно 729. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

**766.** Если из первых четырех членов геометрической прогрессии вычесть соответственно 0,5, 1, 4, 12, то получатся первые четыре члена арифметической прогрессии. Найдите знаменатель геометрической прогрессии и сумму первых шести ее членов.

**767.** Три числа, сумма которых равна 15,6, являются первыми тремя членами геометрической прогрессии и одновременно вторым, четырнадцатым и пятидесятым членами арифметической прогрессии. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии.

## Упражнения для повторения

**768.** Решите неравенство:
а) $(x - 1)(x - 6) < 50$; б) $(x - 2)(x - 14) > 64$.

**769.** При каком $x$ двучлен $2x^2 + 6x$ принимает наименьшее значение и чему равно это значение?

**770.** Пересекает ли график функции $y = \frac{6}{x-2}$ прямую:
а) $y = 6$; б) $y = 8$?

При положительном ответе найдите координаты точек пересечения.

### Контрольные вопросы и задания

**1.** Сформулируйте определение геометрической прогрессии. Выведите формулу $n$-го члена.

**2.** Сформулируйте и докажите характеристическое свойство геометрической прогрессии.

**3.** Выведите формулу суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии. Найдите сумму членов геометрической прогрессии с четвертого по восьмой включительно, если $a_1 = 576$, $q = -\frac{1}{2}$.

## § 13. СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 35. Предел последовательности

Рассмотрим последовательность $(a_n)$, где $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Запишем формулу $n$-го члена последовательности $(a_n)$ в виде $a_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ и вычислим первые несколько членов последовательности:

$$a_1 = 1\frac{1}{2},\ a_2 = 1\frac{2}{3},\ a_3 = 1\frac{3}{4},\ a_4 = 1\frac{4}{5},\ a_5 = 1\frac{5}{6},\ a_6 = 1\frac{6}{7}.$$

Найдем еще $a_{100}$ и $a_{2002}$:

$$a_{100} = 1\frac{100}{101},\ a_{2002} = 1\frac{2002}{2003}.$$

Мы видим, что с увеличением $n$ члены последовательности приближаются к 2. На координатной прямой точки, изображающие члены последовательности $(a_n)$, располагаются все ближе и ближе к точке с координатой 2 (рис. 93).

Расстояние между точками с координатами $a_n$ и 2 равно $|a_n - 2|$. С возрастанием $n$ это расстояние неограниченно уменьшается. Так как $|a_n - 2| = \left|2 - \frac{1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1}$, то для любого положительного числа $\varepsilon$ (читается «эпсилон») мы можем, решив

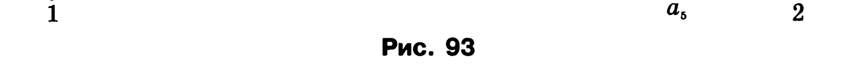



Рис. 93

неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, указать такое значение $n$, при котором $|a_n - 2| < \varepsilon$. Говорят, что последовательность $(a_n)$ *стремится* к 2 или что число 2 является *пределом последовательности* $(a_n)$.

Определение. **Число $b$ называется пределом последовательности $(a_n)$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ существует такой номер $n_0$, что при $n > n_0$ верно неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$.**

Если число $b$ является пределом последовательности $(a_n)$, то это записывают так: $\lim a_n = b$ (lim есть сокращение латинского слова *limes*, означающего «предел»). Иногда используется также запись $a_n \to b$.

Выясним геометрический смысл понятия предела последовательности. Как известно, неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $-\varepsilon < a_n - b < \varepsilon$, а значит, и двойному неравенству $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$. Отсюда вытекает, что если $\lim a_n = b$, то для любого $\varepsilon$ найдется такой номер $n$, начиная с которого члены последовательности изображаются точками, принадлежащими промежутку $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$, а вне этого промежутка находится только конечное число точек. Иначе говоря, если число $b$ является пределом последовательности $(a_n)$, то точки, изображающие члены этой последовательности на координатной прямой, скапливаются около точки $b$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а не имеющая предела — *расходящейся* последовательностью.

Приведем примеры сходящейся и расходящейся последовательностей.

Пример 1. Пусть дана последовательность $(c_n)$, где $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Эта последовательность начинается так:

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots .$$

На координатной прямой точки, изображающие члены последовательности, скапливаются около точки 0, располагаясь то слева, то справа от нее (рис. 94).

Докажем, что число 0 является пределом последовательности $(c_n)$. Допустим, что задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Требуется доказать,

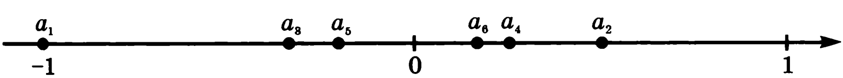



Рис. 94

что найдется такой номер $n$, начиная с которого для всех членов последовательности $(c_n)$ выполняется неравенство $|c_n - 0| < \varepsilon$.

Решим относительно $n$ неравенство

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Имеем:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Проходя эту цепочку снизу вверх, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер, начиная с которого $|c_n - 0| < \varepsilon$. Так, например, если $\varepsilon = 0{,}002$, то $\frac{1}{\varepsilon} = 500$. Неравенство $|c_n - 0| < 0{,}002$ выполняется при $n > 500$, т. е. начиная с номера $n$, равного 501.

Значит, по определению $\lim c_n = 0$.

Пример 2. Пусть дана последовательность $(y_n)$, где $y_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Эта последовательность начинается так:

$$0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ \ldots.$$

На координатной прямой члены последовательности изображаются точками, которые скапливаются около двух точек: $-1$ и $1$ (рис. 95). Последовательность $(y_n)$ не имеет предела.


**Рис. 95**

Выясним некоторые свойства сходящихся последовательностей.

1. *Последовательность может иметь только один предел.*

Допустим противное, что существует последовательность $(x_n)$, имеющая два предела, т. е. $\lim x_n = a$ и $\lim x_n = b$, где $a \neq b$.

Отметим точки $a$ и $b$ на координатной прямой. Между ними находится бесконечно много точек. Поэтому всегда можно выбрать число $\varepsilon$ такое, что промежутки $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$ не будут иметь общих точек (рис. 96). Так как число $a$ является пределом последовательности $(x_n)$, то, начиная с некоторого номера $n$,


**Рис. 96**

все члены последовательности попадут в промежуток $(a - \varepsilon;$ $a + \varepsilon)$, а вне этого промежутка окажется конечное число членов последовательности. Значит, в промежутке $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ окажется лишь конечное число членов последовательности, а это противоречит тому, что число $b$ — предел последовательности. Значит, предположение неверно и последовательность $(x_n)$ не может иметь двух пределов.

2. *Если все члены последовательности $(x_n)$ равны $b$, то предел этой последовательности равен $b$.*

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что в любой окрестности числа $b$ содержатся все члены последовательности.

3. *Если последовательность $(x_n)$ имеет предел, то она ограничена.*

Пусть $\lim x_n = a$. Возьмем какое-либо число $\varepsilon > 0$. Из определения предела вытекает, что, начиная с некоторого номера $n$, все члены последовательности попадают в промежуток $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Вне его останется только конечное число членов последовательности. Поэтому промежуток $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ можно расширить так, чтобы новый промежуток $(l; p)$ содержал все члены последовательности. А это означает, что существуют числа $l$ и $p$ такие, что для всех членов последовательности выполняется двойное неравенство $l < x_n < p$, т. е. последовательность $(x_n)$ ограниченная.

Заметим, что обратное неверно: последовательность может быть ограниченной, но не иметь предела. Примером может служить последовательность, в которой каждый член равен остатку от деления номера члена на 5:

$$1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, \ldots .$$

**771.** Дана последовательность $(x_n)$, где $x_n = \frac{3n - 1}{n}$. Вычислите $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_{100}$, $x_{1000}$. К какому числу стремится последовательность? Проведите доказательство.

**772.** Вычислите первые шесть членов последовательности $(a_n)$, заданной формулой $a_n = \frac{2n + 1}{n}$, и изобразите их на координатной прямой. Какое предположение о пределе последовательности $(a_n)$ можно сделать? Проведите доказательство.

**773.** Является ли сходящейся последовательность:

а) $3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots$;

б) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{3n}, \ldots$;

в) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots$;

г) $2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$?

**774.** Докажите, что предел последовательности

$$\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, 1 - \frac{(-1)^n}{n+1}$$

равен 1.

**775.** К какому числу сходится последовательность, если:

а) $c_n = 2 + \frac{1}{n+3}$; б) $c_n = \frac{3n+5}{n+2}$; в) $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$?

**776.** Имеет ли предел последовательность, и если имеет, то чему он равен:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$;

б) $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, \ldots$;

в) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{2n-1}{2}, \ldots$;

г) $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$;

д) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n n}{n+1}, \ldots$;

е) $1, \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}, \ldots$?

**777.** Докажите, что если $(x_n)$ — последовательность десятичных дробей, которые получаются, если в бесконечной периодической десятичной дроби 0,(3) оставлять одну, две, три и т. д. цифры после запятой, то $\lim x_n = \frac{1}{3}$.

**778.** В последовательности $(u_n)$ все члены, начиная с десятого, равны 3. Является ли эта последовательность сходящейся, и если да, то чему равен ее предел?

**779.** Пусть $(c_n)$ — последовательность, предел которой равен 8. Из последовательности $(c_n)$ вычеркнули:

а) шесть первых членов;

б) все члены с четными номерами.

Будет ли оставшаяся последовательность сходящейся, и если да, то чему равен ее предел?

**780.** Известно, что каждый член сходящейся последовательности является отрицательным числом. Может ли пределом этой последовательности быть:

а) положительное число; б) число 0?

### Упражнения для повторения

**781.** Решите неравенство:
а) $x^3 - 3x^2 - x + 3 > 0$; б) $x^3 - 2x^2 - 16x + 32 < 0$.

**782.** Докажите, что при любых $a$, $b$ и $c$ имеет корни уравнение

$$(x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c) = 0.$$

## 36. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Начнем с примера. Пусть длина отрезка $AB_1$ равна 1 (рис. 97). Отметим справа от точки $B_1$ точку $B_2$ такую, что $B_1B_2 = \frac{1}{2}$. Затем справа от точки $B_2$ отметим точку $B_3$ такую, что $B_2B_3 = \frac{1}{2}B_1B_2 = \frac{1}{4}$, и т. д. Длины отрезков $AB_1$, $B_1B_2$, $B_2B_3$, $B_3B_4$, ... образуют бесконечную геометрическую прогрессию $(a_n)$:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \dots,$$

знаменатель которой равен $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь последовательность длин отрезков $AB_1$, $AB_2$, $AB_3$, $AB_4$, ... :

$$AB_1 = 1,$$

$$AB_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2},$$

$$AB_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4},$$

$$AB_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8} \text{ и т. д.}$$

Длины отрезков $AB_1$, $AB_2$, $AB_3$, ... образуют последовательность

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4},\ 1\frac{7}{8},\ \dots,$$

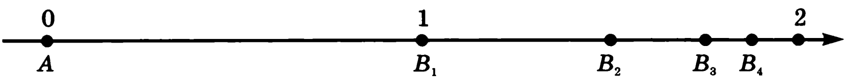



Рис. 97

членами которой являются суммы $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, ... , $S_n$, ... , где $S_n$ — сумма первых $n$ членов геометрической прогрессии $(a_n)$.

Очевидно, что эти суммы приближаются к 2. Действительно, по формуле суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии находим, что

$$S_n = \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{(2^n - 1)2}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

При неограниченном увеличении $n$ модуль разности $S_n - 2$ становится меньше любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$. Значит, $\lim S_n = 2$. Число 2 называют *суммой бесконечной геометрической прогрессии* 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... и пишут:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$

Рассмотрим теперь произвольную геометрическую прогрессию $(b_n)$:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3,\ \ldots$$

со знаменателем $q$, где $|q| < 1$.

Найдем сумму первых $n$ членов этой прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Преобразуем выражение, записанное в правой части равенства. Получим

$$S_n = \frac{b_1q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Можно доказать, что если $|q| < 1$, $q^n$ при неограниченном увеличении $n$ стремится к нулю, а поэтому произведение $\frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$ также стремится к нулю. Значит, при неограниченном увеличении $n$ сумма $S_n$ стремится к числу $\frac{b_1}{1 - q}$.

Число $\frac{b_1}{1 - q}$ называют *суммой бесконечной геометрической прогрессии $(b_n)$ со знаменателем $q$, где $|q| < 1$*. Обозначив эту сумму буквой $S$, получим

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q$, где $|q| < 1$, называют *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*. Примерами бесконечно убывающих геометрических прогрессий могут служить прогрессии:

$$6,\ 1,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{216},\ \ldots,\ \text{где } q = \frac{1}{6},$$

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \ldots,\ \text{где } q = -\frac{1}{3}.$$

Заметим, что термин «бесконечно убывающая» характеризует здесь изменение не самих членов прогрессии, а только их модулей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия является убывающей последовательностью, в соответствии с ранее данным определением, лишь тогда, когда ее первый член и знаменатель положительны.

Формулу $S = \frac{b_1}{1 - q}$ называют *формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.*

Приведем примеры использования этой формулы.

Пример 1. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(a_n)$ равна $\frac{8}{3}$, а сумма последовательности $(c_n)$, составленной из кубов ее членов, равна $\frac{512}{63}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии $(a_n)$.

Пусть $a_1$ и $q$ — первый член и знаменатель геометрической прогрессии $(a_n)$. Тогда $a_1^3$ и $q^3$ являются соответственно первым членом и знаменателем прогрессии $(c_n)$. Так как $(a_n)$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то $|q| < 1$, а поэтому $|q^3|$ также меньше 1, т. е. последовательность $(c_n)$ также является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Применяя к прогрессиям $(a_n)$ и $(c_n)$ формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1 - q} = \dfrac{8}{3}, \\[2mm] \dfrac{a_1^3}{1 - q^3} = \dfrac{512}{63}. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $a_1 = \frac{8}{3}(1 - q)$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$\frac{512(1 - q)^3}{27(1 - q^3)} = \frac{512}{63}.$$

Отсюда

$$\frac{(1-q)^2}{3(1+q+q^2)} = \frac{1}{7},$$

$$7 - 14q + 7q^2 = 3 + 3q + 3q^2,$$

$$4q^2 - 17q + 4 = 0,$$

$$q_1 = \frac{1}{4},\ q_2 = 4.$$

Второй корень квадратного уравнения не соответствует условию задачи.

Из равенства $a_1 = \frac{8}{3}(1-q)$ находим, что если $q = \frac{1}{4}$, то $a_1 = 2$.

Ответ: первый член прогрессии равен 2, а знаменатель равен $\frac{1}{4}$.

Пример 2. Представим бесконечную десятичную периодическую дробь 0,8(3) в виде обыкновенной.

Число можно записать в виде суммы:

$$0{,}8(3) = 0{,}8 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots .$$

В сумме

$$0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$$

слагаемые являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = 0{,}1$.

Применив формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, найдем, что

$$S = \frac{0{,}03}{1-0{,}1} = \frac{1}{30}.$$

Значит,

$$0{,}8(3) = 0{,}8 + \frac{1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Разделив 5 на 6, нетрудно убедиться, что дробь $\frac{5}{6}$ действительно обращается в бесконечную десятичную периодическую дробь 0,8(3).

**783.** В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(a_n)$ найдите:

а) $S$, если $a_1 = -56$, $q = 0{,}2$;

б) $S$, если $a_1 = -\sqrt{3}$, $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $a_1$, если $S = 28$, $q = -0{,}5$;

г) $a_1$, если $S = 2\sqrt{2}$, $q = \frac{3}{4}$.

**784.** Найдите сумму, слагаемые в которой являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$; в) $\frac{2}{7} - \frac{4}{49} + \frac{8}{343} - \ldots$;

б) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \ldots$; г) $3\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \ldots$.

**785.** Представьте число в виде обыкновенной дроби и сделайте проверку, выполняя деление числителя обыкновенной дроби на знаменатель:

а) 0,(6); б) 0,(16); в) 0,2(3); г) 0,12(5).

**786.** Представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 0,7(2); б) 0,0(3); в) 1,(08); г) 2,(15).

**787.** Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 18, а сумма первых трех ее членов равна $12\frac{2}{3}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

**788.** В равносторонний треугольник со стороной 12 см вписан треугольник, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника. В полученный треугольник таким же способом вписан третий треугольник и т. д. Найдите сумму периметров и сумму площадей этих треугольников.

**789.** В квадрат, сторона которого равна $a$, вписан круг, в этот круг вписан квадрат, в полученный квадрат снова вписан круг и т. д. Найдите сумму:

а) периметров квадратов; в) длин окружностей;

б) площадей квадратов; г) площадей кругов.

**790.** Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член относится к сумме последующих членов как 3 к 5.

**791.** Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(b_n)$ равна 3, а сумма последовательности, составленной из квадратов ее членов, равна 1,8. Найдите первый член и знаменатель прогрессии $(b_n)$.

**792.** В бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма первых двух членов равна 9. Сумма последовательности, составленной из кубов ее членов, относится к сумме последовательности, составленной из квадратов ее членов, как 36 : 7. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

**793.** Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 64. Члены, стоящие на нечетных местах, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой равна 51,2. Вычислите первые четыре члена каждой из прогрессий.

**794.** В бесконечно убывающей геометрической прогрессии первый член составляет одну четвертую часть от суммы всех остальных. Найдите первый член и знаменатель прогрессии, если известно, что третий член этой прогрессии равен 9.

## Упражнения для повторения

**795.** Решите уравнение:

а) $\frac{x-4}{x+2}+\frac{x+2}{x-4}=4\frac{1}{4}$; б) $\frac{x-6}{x-1}+\frac{x-1}{x-6}=2\frac{1}{6}$.

**796.** При каких значениях $a$ неравенство

а) $ax^2-6x+4>0$; б) $ax^2-4(a-1)x+2a>0$

верно при любом $x$?

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Что называется пределом последовательности? Разъясните геометрический смысл предела последовательности.

**2.** Сформулируйте свойства сходящихся последовательностей.

**3.** Какая последовательность называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией? Запишите формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Представьте число в виде обыкновенной дроби.

## Дополнительные упражнения к главе 4

### К параграфу 10

**797.** Может ли последовательность $(a_n)$ быть задана формулой:

а) $a_n=\frac{1}{(n-2)(n-4)}$; в) $a_n=\frac{1}{n^2-0{,}5n-5}$?

б) $a_n=\frac{1}{n^2+5n+4}$;

**798.** При каких значениях $b$ последовательность $(x_n)$ является возрастающей и при каких — убывающей, если:

а) $x_n = \dfrac{2n^2 + bn}{n^2}$; б) $x_n = \dfrac{6n - b}{n + 4}$?

**799.** Является ли ограниченной последовательность $(c_n)$, если:

а) $c_n = \dfrac{n^2 + 2}{n}$; б) $c_n = \dfrac{5 + (-1)^n}{n}$; в) $c_n = 2 + 3 \cdot (-1)^n$?

**800.** Даны последовательности $(a_n)$ и $(b_n)$, где $a_n = 2^{n-4}$, $b_n = 2n + 9$. Докажите, что $a_n > b_n$ при любом натуральном $n$.

**801.** Докажите, что произведение $P_n$ первых $n$ членов последовательности

$$1 - \frac{4}{1},\ 1 - \frac{4}{9},\ 1 - \frac{4}{25},\ \ldots,\ 1 - \frac{4}{(2n-1)^2},\ \ldots$$

равно $\dfrac{1 + 2n}{1 - 2n}$.

### К параграфу 11

**802.** Между числами 3 и 15 вставьте несколько чисел так, чтобы получилась арифметическая прогрессия $(a_n)$, в которой $a_4 : a_{n-2} = 5 : 8$.

**803.** Между числами $a$ и $b$ поместили $m$ чисел, которые вместе с данными числами составили арифметическую прогрессию. Найдите первые три члена этой прогрессии.

**804.** Докажите, что если длины сторон прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то радиус вписанной окружности равен разности этой прогрессии.

**805.** Известно, что $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, в которой $a_1 + a_4 + a_7 + \ldots + a_{16} = 210$. Найдите, чему равна сумма $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$.

**806.** Докажите, что если $(a_n)$ — арифметическая прогрессия и $a_p + a_m = a_k + a_l$, то $p + m = k + l$.

**807.** Верно ли утверждение: последовательность $(a_n)$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой ее член, начиная со второго, есть среднее арифметическое равноудаленных от него членов?

**808.** Докажите, что если числа $a$, $b$, $c$ составляют арифметическую прогрессию, то:

а) $3(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a + b)^2 = (a + b + c)^2$;

б) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = \frac{1}{4}(c - a)^2$.

**809.** В арифметической прогрессии

$$2, 5, 8, 11, \ldots$$

оставили только те члены, номера которых кратны 5. Найдите сумму первых девяти членов образовавшейся последовательности.

**810.** Докажите, что в арифметической прогрессии

$$S_{n+3} - S_n = 3(S_{n+2} - S_{n+1}).$$

**811.** Последовательность 1, 3, 8, 16, ... , $b_n$, ... обладает тем свойством, что разности последующего и предыдущего членов составляют арифметическую прогрессию. Найдите $b_{10}$.

**812.** Найдите корень уравнения, в котором слагаемые, записанные в скобках, составляют арифметическую прогрессию:

а) $(x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + \ldots + (x + 24) = 180$;

б) $(2x + 1) + (2x + 4) + (2x + 7) + \ldots + (2x + 46) = 472$.

**813.** Найдите сумму $m + n$ членов арифметической прогрессии, в которой $a_m = n$, $a_n = m$.

**814.** В арифметической прогрессии $S_6 = m$, $S_{12} = p$. Найдите $S_{15}$.

**815.** Пусть $(a_n)$ — арифметическая прогрессия, $(S_n)$ — последовательность сумм первых $n$ ее членов. Известно, что члены последовательности $(a_n)$ изображаются в координатной плоскости точками, принадлежащими прямой $y = 3x - 1$. Напишите уравнение кривой, которой принадлежат точки, изображающие члены последовательности $(S_n)$.

## К параграфу 12

**816.** Между числами $\frac{a}{b^2}$ и $\frac{b}{a^2}$, где $a > 0$, $b > 0$, вставьте пять чисел, которые вместе с данными числами составят геометрическую прогрессию.

**817.** Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 124, а их произведение равно 8000. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

**818.** Докажите, что если $(b_n)$ — геометрическая прогрессия и $b_p \cdot b_m$ то $b_k \cdot b_1$, то $p + m = k + 1$.

**819.** Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найдите эти числа.

**820.** Докажите, что только последовательность равных чисел является одновременно арифметической и геометрической прогрессией.

**821.** Докажите, что если знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, то каждый ее член, начиная со второго, равен разности последующего и предыдущего членов.

**822.** Докажите, что если числа $a$, $b$, $c$, $d$ составляют геометрическую прогрессию, то:
а) $(a - c)^2 + (b - c)^2 = (a - d)^2 + (b - d)^2$;
б) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

**823.** Сколько членов геометрической прогрессии

$$0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ \ldots$$

надо сложить, чтобы полученная сумма была:
а) равна 51,1;
б) больше 10, но меньше 40.

**824.** Найдите число членов конечной возрастающей геометрической прогрессии, если известно, что сумма первого и последнего членов равна 9,9, произведение второго и предпоследнего членов равно 2,88, а сумма всех членов прогрессии равна 18,9.

**825.** Три числа, сумма которых равна 42, являются первыми тремя членами геометрической прогрессии и одновременно вторым, пятым и одиннадцатым членами арифметической прогрессии. Сколько членов геометрической прогрессии надо сложить, чтобы их сумма была равна 762?

## К параграфу 13

**826.** Известно, что последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ имеет предел, равный $b$. Является ли сходящейся последовательность
а) $u_5, u_6, u_7, \ldots, u_n, \ldots$, полученная из данной последовательности путем отбрасывания первых четырех членов;
б) $p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, полученная из данной последовательности добавлением первых четырех членов?

При положительном ответе укажите, чему равен предел.

**827.** Верно ли, что равен нулю предел последовательности $(u_n)$, если:

а) $u_n = \frac{1}{6^n}$; б) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+6}$; в) $u_n = (-1)^n 3 + 3$?

**828.** Известно, что $(a_n)$ — сходящаяся последовательность. При каком условии последовательность

$$a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \dots, a_n, 0, \dots$$

является сходящейся?

**829.** Даны последовательности $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$, где

$$a_n = \frac{2}{n+1}, \ b_n = \frac{1}{n}, \ c_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

Найдите $\lim a_n$, $\lim b_n$, $\lim c_n$, если они существуют.

**830.** Известно, что сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 64, а сумма первых четырех членов этой прогрессии равна $63\frac{3}{4}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

**831.** Найдите сумму первых пяти членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, второй член которой равен $\frac{1}{3}$, а отношение суммы последовательности, составленной из квадратов ее членов, к сумме этой последовательности равно $\frac{3}{4}$.

**832.** В бесконечно убывающей геометрической прогрессии отношение первого члена к сумме последующих членов равно $\frac{2}{7}$. Найдите знаменатель прогрессии.

ГЛАВА 5

# СТЕПЕНИ И КОРНИ

## § 14. ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

### 37. Функция, обратная данной

Таблица

| $u$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

задает два соответствия: одно между множеством

$$U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

и множеством $V = \{0, 1, 4, 9\}$, другое между множеством $V$ и множеством $U$. Такие соответствия называют *взаимно обратными соответствиями*. Первое соответствие является функцией, так как каждому значению переменной $u$ соответствует единственное значение переменной $v$. Второе соответствие функцией не является, так как существуют такие значения переменной $v$, которым соответствует более одного значения $u$. Например, если $v = 4$, то $u = -2$ и $u = 2$.

Рассмотрим еще одну таблицу:

| $x$ | −4 | −2 | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

Эта таблица также задает два взаимно обратных соответствия: одно между множеством $X = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ и множеством $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ и второе между множеством $Y$ и множеством $X$. Каждое из этих соответствий является функцией. Обозначим первую функцию буквой $f$. Для функции $f$ обратное соответствие также является функцией. Говорят, что функция $f$ обратима.

Определение. **Функция с областью определения $X$ и областью значений $Y$ называется обратимой, если обратное ей соответствие между множеством $Y$ и множеством $X$ — функция.**

**Если функция $f$ обратима, то обратное ей соответствие называют функцией, обратной функции $f$.**

Очевидно, что обратима та и только та функция, которая каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента.

Отсюда, в частности, следует, что *каждая монотонная функция обратима.*

Обратимыми функциями являются, например, линейная функция, степенная функция с нечетным показателем, обратная пропорциональность, функция $y = \sqrt{x}$.

Пример 1. Пусть функция $f$ задана формулой $y = x^2 - 4$, где $x \geqslant 0$. Покажем, что функция $f$ обратима и зададим формулой функцию $g$, обратную $f$.

Функция $f$ — возрастающая, значит, она обратима. Выразим из формулы $y = x^2 - 4$, где $x \geqslant 0$, переменную $x$ через $y$. Получим $x^2 = y + 4$. Отсюда $x = \sqrt{y+4}$, так как $x \geqslant 0$. Формулой $x = \sqrt{y+4}$, где $y$ является независимой переменной, а $x$ — зависимой переменной, задается функция, обратная функции $f$.

Перейдем к стандартным обозначениям, обозначив независимую переменную буквой $x$, а зависимую — буквой $y$. Для этого в формуле $x = \sqrt{y+4}$ поменяем $x$ на $y$ и $y$ на $x$. Получим формулу $y = \sqrt{x+4}$.

Областью определения функции $f$ является множество неотрицательных чисел, т. е. $D(f) = [0; +\infty)$, а областью значений функции $f$ является множество действительных чисел, больших или равных $-4$, т. е. $E(f) = [-4; +\infty)$.

Найдем область определения функции $g$. Для этого решим неравенство $x + 4 \geqslant 0$. Отсюда $D(g) = [-4; +\infty)$. Теперь найдем область значений функции $g$. Так как функция $g$, т. е. $y = \sqrt{x+4}$, при любых $x \geqslant -4$ может принимать любые неотрицательные значения, то $E(g) = [0; +\infty)$.

Мы видим, что область определения и область значений функций $f$ и $g$ поменялись ролями: *область определения функции $f$ стала областью значений функции $g$, а область значений функции $f$ стала областью определения функции $g$.*

Эта особенность имеет место для любых двух взаимно обратных функций. Действительно, из определения взаимно обратных функций $f$ и $g$ следует, что если $a$ — значение аргумента функции $f$, а $b$ — соответствующее ему значение функции, то для функции $g$ значением аргумента является $b$, а соответствующим ему значением функции является $a$. Иначе говоря, если верно равенство $b = f(a)$, то верно и равенство $a = g(b)$.

Таким образом, если $X = D(f)$ и $Y = E(f)$, то $D(g) = Y$ и $E(g) = X$.

Из равенств $b = f(a)$ и $a = g(b)$ следует, что

$$f(g(b)) = f(a) = b \quad \text{и} \quad g(f(a)) = g(b) = a.$$

Таким образом, если $f$ и $g$ — взаимно обратные функции, то имеют место тождества

$$f(g(x)) = x \quad \text{и} \quad g(f(x)) = x.$$

Эти тождества можно использовать, в частности, для того, чтобы найти формулу, задающую функцию, обратную данной.

Пример 2. Найдем функцию, обратную функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x - 2,$$

где $-6 \leqslant x \leqslant 9$.

Функция $f$ обратимая, поэтому имеет обратную функцию. Пусть $g$ — функция, обратная $f$. Используя тождество $f(g(x)) = x$, получим $\frac{1}{3}g(x) - 2 = x$, где $-6 \leqslant x \leqslant 9$. Отсюда имеем: $g(x) = 3x + 6$, где $-4 \leqslant x \leqslant 1$. Неравенство $-4 \leqslant x \leqslant 1$ получили, подставив в неравенство $-6 \leqslant g(x) \leqslant 9$ выражение $3x + 6$: $-6 \leqslant 3x + 6 \leqslant 9$, $-12 \leqslant 3x \leqslant 3$, $-4 \leqslant x \leqslant 1$. Значит, функцией, обратной $f$, является функция $g(x) = 3x + 6$, где $D(g) = [-4; 1]$.

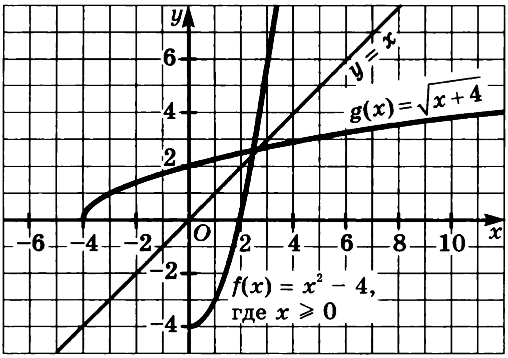



Рис. 98

На рисунке 98 изображены графики функций $y = x^2 - 4$, где $x \geqslant 0$, и $y = \sqrt{x + 4}$. Они симметричны относительно прямой $y = x$. Также симметричны относительно прямой $y = x$ и графики функций $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$, где $-6 \leqslant x \leqslant 9$, и $g(x) = 3x + 6$, где $-4 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 99).

Таким же свойством обладают любые взаимно обратные функции.

Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику некоторой монотонной функции $f$ (рис. 100). Тогда $b = f(a)$ — верное равенство.

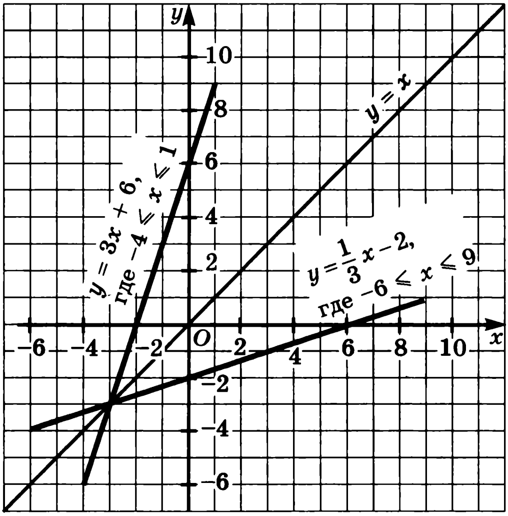



Рис. 99

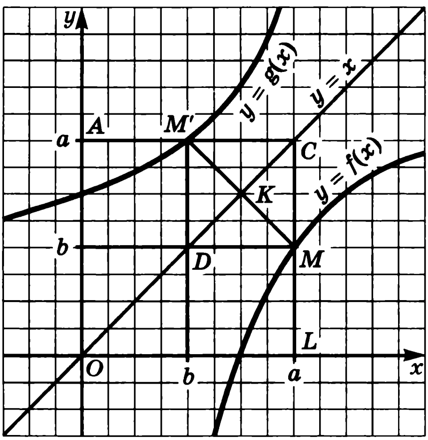



Рис. 100

В этом случае верным является и равенство $a = g(b)$, где $g$ — функция, обратная $f$. Из этого следует, что точка $M'(b;\ a)$ принадлежит графику функции $g$. Но точки $M$ и $M'$ симметричны относительно прямой $y = x$. Этот вывод достаточно очевиден, так как симметрия координатной плоскости относительно прямой $y = x$ переводит точку $M(a;\ b)$ в точку $M'(b;\ a)$.

Перечислим некоторые свойства двух взаимно обратных функций $f$ и $g$.

1. Область определения функции $f$ является областью значений функции $g$, а область значений функции $f$ является областью определения функции $g$.

2. Функция, обратная возрастающей, также является возрастающей. Функция, обратная убывающей, также является убывающей.

3. Если обратимая функция $f$ нечетная, то обратная ей функция $g$ также нечетная.

Свойство 1 было доказано выше. Свойства 2 и 3 докажите самостоятельно.

**833.** Функция задана таблицей:

а)

| $x$ | −5 | −3 | −1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 3 | 5 | 4 | 1 |

б)

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 7 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −2 | −3 | −4 | −5 | −6 |

Является ли функцией соответствие, обратное функции $f$?

**834.** Функция $g$ задана формулой $y = x^2$, где $x \in [-5; 7]$. Найдите область значений функции $g$. Является ли функция $g$ обратимой?

**835.** Функция $f$ задана формулой $y = x^4$, где $D(f) = [0; 3]$. Найдите $E(f)$. Является ли функция $f$ обратимой?

**836.** Является ли функция обратимой, если она задана формулой:

а) $y = x^2$;

б) $y = x^3$;

в) $y = \frac{3}{5}x - 8$;

г) $y = |x|$?

**837.** Функция $f$ задана формулой:

а) $y = x^2$, где $D(f) = [3; 7]$;

б) $y = 5x - 8$, где $D(f) = [-3; 12]$;

в) $y = x^2 - 1$, где $D(f) = [-2; 3]$;

г) $y = \frac{6}{x}$, где $D(f) = [-6; 1]$.

Является ли функция $f$ обратимой? В случае положительного ответа задайте функцию $g$, обратную функции $f$, формулой и укажите область ее определения.

**838.** Задайте формулой функцию, обратную данной:

а) $y = 7x - 3$;

б) $y = -2x + 3$;

в) $y = 10x - 1$, где $2 \leqslant x \leqslant 8$;

г) $y = -\frac{1}{3}x + 3$, где $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

**839.** Известно, что $g$ — функция, обратная функции $f$, и что $D(f) = [-20; 40]$, $E(f) = [-5; 10]$. Найдите $D(g)$ и $E(g)$.

**840.** Известно, что графику обратимой функции $y = g(f)$ принадлежат точки $A(2;\ 8)$ и $B(-1000;\ -10)$. Найдите координаты двух точек, которые принадлежат графику функции, обратной функции $g$.

**841.** Некоторая функция $y = f(x)$ задана на множестве действительных чисел. Является ли эта функция обратимой, если известно, что ее графику принадлежат точки:
а) $A(35;\ 41)$ и $B(83;\ 41)$; б) $C(12;\ -8)$ и $D(31;\ -8)$?

**842.** Постройте график функции, обратной функции:
а) $y = \frac{2}{3}x - 1$, где $-3 \leqslant x \leqslant 6$;
б) $y = x^2$, где $x \leqslant 0$;
в) $y = \sqrt{x}$;
г) $y = \sqrt{-x}$.

**843.** Докажите, что функцией, обратной функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, является та же функция. Дайте геометрическое истолкование этому факту.

**844.** Докажите, что функции, заданные формулами $y = \frac{1}{x-2}$, где $x > 2$, и $y = \frac{2x+1}{x}$, где $x > 0$, являются взаимно обратными функциями.

**845.** Задайте формулой функцию, обратную данной:
а) $y = 1 - \sqrt{x-2}$; б) $y = 1 + \sqrt{x-2}$.

## Упражнения для повторения

**846.** Найдите сумму 40 членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 36$ и $a_{10} = 21$.

**847.** Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 5, принадлежащих промежутку $[0{,}2;\ 6{,}4]$.

**848.** Решите систему уравнений:
а) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy + x - y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x+2| + |y-2| = 12, \\ |x+2| = 3y - 6. \end{cases}$

**849.** Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

## 38. Функция, обратная степенной функции с натуральным показателем

Рассмотрим степенную функцию с натуральным показателем $n$.

При нечетном $n$ функция $f(x) = x^n$ является возрастающей (рис. 101). Значит, она обратима. Для функции $g$, обратной $f$, где $n > 1$, ввели специальное обозначение $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Выражение $\sqrt[n]{x}$ называют *корнем $n$-й степени из $x$*. Число $n$ называют *показателем корня*, а $x$ — *подкоренным выражением*. Например, выражение $\sqrt[3]{4}$ является корнем третьей степени из четырех. Корень третьей степени называют также кубическим корнем. Выражение $\sqrt[7]{-5}$ есть корень седьмой степени из $-5$.

Согласно тождеству $f(g(x)) = x$, где $f$ и $g$ — взаимно обратные функции, имеем $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$. Отсюда следует, например, что $\sqrt[3]{-27} = -3$, так как $(-3)^3 = -27$; $\sqrt[5]{32} = 2$, так как $2^5 = 32$. Вообще если $n$ — нечетное число и $a$ — произвольное действительное число, то $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = a$.

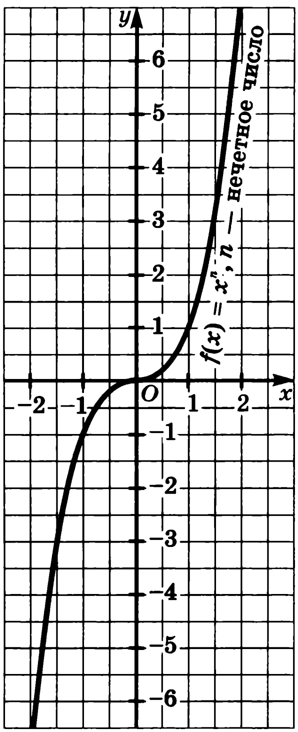



Рис. 101

Рассмотрим свойства функции $g(x) = \sqrt[n]{x}$, где $n$ — нечетное число и $x \in \boldsymbol{R}$.

1. Если $x = 0$, то $g(x) = 0$;
если $x < 0$, то $g(x) < 0$;
если $x > 0$, то $g(x) > 0$.

Для обоснования воспользуемся тождеством $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$, где $n$ — нечетное натуральное число.

Если степень числа равна нулю, то основание равно нулю. Если нечетная степень отрицательна, то основание степени отрицательно. Если нечетная степень положительна, то основание степени положительно.

2. Функция $g$ является возрастающей. Это следует из того, что функция

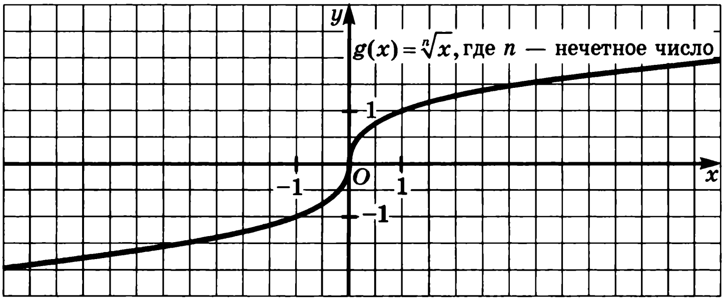



Рис. 102

$f(x) = x^n$, где $n$ — нечетное число, возрастающая, и из свойства, что функция, обратная возрастающей, возрастающая.

3. Функция $g$ является нечетной, т. е. $g(-x) = -g(x)$. Это вытекает из свойства 3 взаимно обратных функций.

4. Область значений функции $g$ — множество действительных чисел.

Это вытекает из свойства взаимно обратных функций $f(x) = x^n$ и $g(x) = \sqrt[n]{x}$, где $n$ — нечетное число. Если $D(f) = \boldsymbol{R}$, то $E(g) = D(f) = \boldsymbol{R}$.

На рисунке 102 показано, как выглядит график функции $g(x) = \sqrt[n]{x}$ при нечетном $n$.

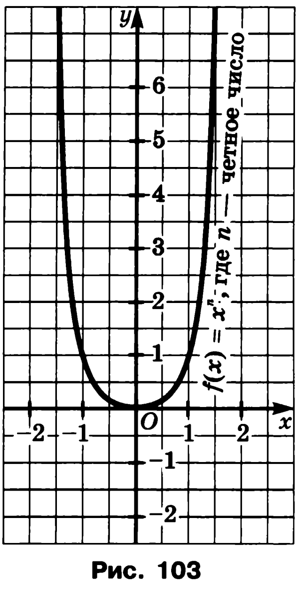



Рис. 103

Рассмотрим теперь степенную функцию $y = x^n$ с четным показателем $n$. Эта функция не является обратимой (рис. 103). Поэтому рассмотрим функцию $f(x) = x^n$, где $n$ — четное число и $D(f) = [0; +\infty)$. Функция $f$ возрастающая и, следовательно, она обратима. Функцию $g$, обратную функции $f$, так же как и в случае нечетного $n$, обозначают знаком корня $g(x) = \sqrt[n]{x}$. При $n = 2$ показатель корня не пишется. Например, выражение $\sqrt[4]{6}$ есть корень четвертой степени из 6; выражение $\sqrt[6]{1{,}5}$ — корень шестой степени из 1,5.

Как и при нечетном $n$, равенство $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ является тождеством и при четном $n$. Однако в этом случае допустимыми значениями $x$ являются $x \geqslant 0$.

Пользуясь этим тождеством, имеем:

$\sqrt[4]{625} = 5$, так как $5^4 = 625$; $\sqrt{1\frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$, так как $\left(1\frac{1}{12}\right)^2 = \left(\frac{13}{12}\right)^2 = 1\frac{25}{144}$.

Вообще если $n$ — четное число и $a \geqslant 0$, то $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = a$.

Выражения $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-2{,}7}$ не имеют смысла.

Рассмотрим свойства функции $g(x) = \sqrt[n]{x}$, где $n$ — четное число и $x \geqslant 0$.

1. Если $x = 0$, то $g(x) = 0$; если $x > 0$, то $g(x) > 0$.

Это следует из свойств степенной функции $f(x) = x^n$ с четным показателем $n$: $f(x) = 0$ при $x = 0$; $f(x) > 0$ при $x > 0$, и тождества $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$.

2. Функция $g$ является возрастающей.

Действительно, функция $f(x) = x^n$, где $x \geqslant 0$ и $n$ — четное число, возрастающая. Значит, обратная ей функция $g(x) = \sqrt[n]{x}$ возрастающая (по свойству взаимно обратных функций).

3. Функция $g$ не является ни четной, ни нечетной. Это вытекает из того, что область определения функции $g$ — промежуток $[0; +\infty)$ — несимметричное относительно нуля множество.

4. Область значений функции $g$ — множество неотрицательных чисел.

Это следует из свойства взаимно обратных функций: если $D(f) = [0; +\infty)$, то $E(g) = D(f) = [0; +\infty)$.

На рисунке 104 показано, как выглядит график функции $g(x) = \sqrt[n]{x}$ с четным показателем.

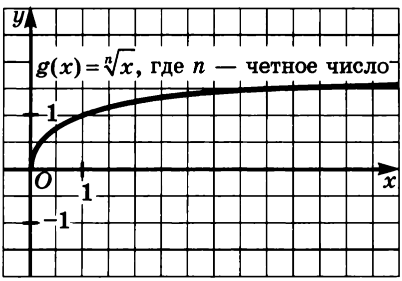



Рис. 104

**850.** Является ли обратимой функция:

а) $y = x^9$;
б) $y = x^{12}$;
в) $y = x^{10}$, где $x \in [0; +\infty)$;
г) $y = x^6$, где $x \in (-\infty; 0]$?

**851.** Задайте формулой функцию, обратную функции:

а) $y = x^5$;

б) $y = x^2$, где $x \in (-\infty; 0]$;

в) $y = x^7$;

г) $y = x^8$, где $x \in [1; +\infty)$;

д) $y = x^3$, где $x \in [-2; 2)$;

е) $y = x^4$, где $x \in [0; 3)$.

**852.** Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x}$;

б) $y = \sqrt[3]{x}$;

в) $y = \sqrt[12]{x}$;

г) $y = \sqrt[31]{x}$.

**853.** Найдите значение функции $y = \sqrt[3]{x}$, если:

а) $x = -1$;

б) $x = -64$;

в) $x = 8$;

г) $x = 1000$;

д) $x = -0{,}125$;

е) $x = \frac{1}{125}$;

ж) $x = 3\frac{3}{8}$;

з) $x = -2\frac{10}{27}$.

**854.** Найдите значение функции $y = \sqrt[4]{x}$, если:

а) $x = 1$; б) $x = 16$; в) $x = \frac{16}{81}$; г) $x = 3\frac{3}{81}$.

**855.** Найдите область значений функции $f$, если:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, где $x \in [-8; 27]$;

б) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, где $x \in \left[\frac{1}{16}; 10\,000\right]$;

в) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, где $x \in [1; 16]$;

г) $f(x) = \sqrt[5]{x}$, где $x \in \left[-\frac{1}{32}; 32\right]$.

**856.** Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[3]{x}$,

б) $y = \sqrt[4]{x}$,

в) $y = \sqrt[3]{|x|}$;

г) $y = \sqrt[4]{-x}$.

**857.** Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{-31}$ и $\sqrt[3]{-28}$;

б) $\sqrt[3]{43}$ и $\sqrt[3]{41}$;

в) $\sqrt[4]{50}$ и $\sqrt[4]{48}$;

г) $\sqrt[6]{8}$ и $\sqrt[6]{9}$.

**858.** Решите уравнение:

а) $x^3 + \sqrt[3]{x} + 7x = 9$;

б) $\sqrt[5]{x - 2} + \sqrt[3]{x + 5} = 3$.

**859.** Изобразите схематически график функции:

а) $y = \sqrt[3]{x}$;
б) $y = -\sqrt[4]{-x}$;
в) $y = -\sqrt[5]{|x|}$;
г) $y = \left|\sqrt[3]{|x|}\right|$.

**860.** Принадлежит ли графику функции:

а) $\sqrt[3]{x}$ точка $A(216;\ 6)$;
б) $\sqrt[4]{x}$ точка $B(-16;\ 2)$;
в) $\sqrt[3]{x-2}$ точка $C(29;\ 3)$;
г) $\sqrt[4]{|x|}$ точка $D(-81;\ 3)$?

**861.** Найдите $n$, зная, что график функции $y = \sqrt[n]{x}$ проходит через точку:

а) $A(32;\ 2)$;
б) $B\left(-\frac{1}{128};\ -\frac{1}{2}\right)$;
в) $C(1;\ 1)$;
г) $D(-1;\ -1)$.

**862.** Постройте график функции:

а) $y = \left|\sqrt[3]{x}\right|$;
б) $y = -\sqrt[3]{-x}$;
в) $y = \sqrt[3]{x-2} - 1$.

## Упражнения для повторения

**863.** Разложите на множители трехчлен:

а) $a^3 - 5a + 2$;
б) $b^3 - 2b^2 - 5b + 6$.

**864.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2{,}5xy, \\ x - y = 0{,}25xy. \end{cases}$$

**865.** Геометрическая прогрессия состоит из четырех членов. Сумма крайних ее членов равна 45, а произведение средних равно 200. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Какая функция называется обратимой? Приведите пример двух взаимно обратных функций.

**2.** Сформулируйте свойства взаимно обратных функций.

**3.** Сформулируйте свойства функции $g(x) = \sqrt[n]{x}$, если $n$ — нечетное число и если $n$ — четное число. Покажите, как выглядит график функции $g$ при нечетном $n$ и четном $n$.

# § 15. КОРНИ $n$-й СТЕПЕНИ И СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

## 39. Арифметический корень $n$-й степени

Мы выяснили, что функция $y = \sqrt[n]{x}$, если $x \geqslant 0$, при любом $n$ (четном и нечетном) принимает неотрицательные значения.

Неотрицательный корень $n$-й степени из числа $a$ называют *арифметическим корнем.*

Определение. **Арифметическим корнем $n$-й степени из числа $a$ называется такое неотрицательное число $b$, $n$-я степень которого равна $a$.**

Из определения следует, что $a \geqslant 0$. Согласно определению если $b \geqslant 0$ и $b^n = a$, то $b = \sqrt[n]{a}$.

Из определения следует, что при любом $a$ и четном $n$ имеет место тождество

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

Перечислим свойства арифметического корня.

1. *Для любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ имеет место тождество*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Действительно, так как $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$.

Применяя свойство степени произведения, получим:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Отсюда по определению арифметического корня верно равенство $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Свойство имеет место, если число множителей под знаком корня больше двух:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{(ab)c} = \sqrt[n]{ab} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}.$$

Следствие. Если $a \geqslant 0$ и $m \in N$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Имеем $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{\underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots \sqrt[n]{a}}_{m \text{ раз}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)$.

2. *Для любых $a \geqslant 0$ и $b > 0$ выполняется тождество*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Так как $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b} > 0$ и $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geqslant 0$, то, применяя свойство степени дроби, имеем

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

По определению арифметического корня получаем

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

3. *Для любого $a \geqslant 0$ и $m \in N$ выполняется тождество*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Так как $\sqrt[m]{a} \geqslant 0$, то и $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \geqslant 0$. Применяя следствие из свойства 1, имеем

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm} = \left(\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})^m}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

По определению арифметического корня, получаем

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Следствие. Для любого $a \geqslant 0$ *и* $k \in N$, $m \in N$ имеет место тождество $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Применяя свойство 3, имеем

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[k]{a^m}\right)^k} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Тождество $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ показывает, что значение корня не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения разделить на имеющийся у них общий множитель или умножить на одно и то же натуральное число. Поэтому это свойство называют *основным свойством корня* (по аналогии с основным свойством дроби).

Тождества, которые представлены в приведенных выше свойствах, дают возможность проще производить вычисления и преобразования выражений, содержащих арифметические корни. При этом каждое тождество можно читать как слева направо, так и справа налево, что зависит от рассматриваемой задачи. Например, если требуется найти значение выражения $\sqrt[4]{81 \cdot 0{,}0625}$, то целесообразно воспользоваться тождеством $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$:

$$\sqrt[4]{81 \cdot 0{,}0625} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{0{,}0625} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{0{,}5^4} = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5.$$

Для вычисления же выражения $\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[6]{2}$ следует воспользоваться тождеством $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{ab}$:

$$\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{32 \cdot 2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Приведем примеры.

Пример 1. Найдем значение выражения:

а) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt[6]{7}}$.

а) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}} = \sqrt[4]{\frac{256}{81}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{81}} = 1\frac{1}{3}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{108}{4}} = \sqrt[3]{27} = 3$;

в) $\frac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{\sqrt[6]{49^2} \cdot \sqrt[6]{7^3}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{\sqrt[6]{7^7}}{\sqrt[6]{7}} = \sqrt[6]{7^6} = 7.$

Пример 2. Найдем значение выражения

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}.$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \sqrt[5]{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)} =$$

$$= \sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 1} = \sqrt[5]{1} = 1.$$

Заметим, что при нечетном $n$ и отрицательном $a$ выражение $\sqrt[n]{a}$ не является арифметическим корнем. Однако в силу нечетности функции $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетном $n$ корень $n$-й степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень и в дальнейшем выполнять преобразования, применяя к ним свойства арифметического корня.

Пример 3. Вынесем множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{-24}$; б) $\sqrt[5]{64a^5}$, где $a < 0$.

а) $\sqrt[3]{-24} = -\sqrt[3]{24} = -\sqrt[3]{8 \cdot 3} = -\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = -2\sqrt[3]{3}$;

б) $\sqrt[5]{64a^5} = -\sqrt[5]{2 \cdot 32 \cdot (-a^5)} = -2(-a)\sqrt[5]{2} = 2a\sqrt[5]{2}.$

Пример 4. Внесем множитель под знак корня:
а) $-3\sqrt[4]{c}$; б) $b\sqrt[6]{3}$, где $b < 0$.

а) $-3\sqrt[4]{c} = -\sqrt[4]{3^4c} = -\sqrt[4]{81c}$;

б) $b\sqrt[6]{3} = -(-b)\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{(-b)^6 \cdot 3} = -\sqrt[6]{3b^6}$.

Пример 5. Упростим выражение

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[12]{17-12\sqrt{2}}.$$

Представим $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ и $\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$ в виде корней 12-й степени. Имеем:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[12]{(\sqrt{2}-1)^4} = \sqrt[12]{\left((\sqrt{2}-1)^2\right)^2} = \sqrt[12]{(3-2\sqrt{2})^2} =$$
$$= \sqrt[12]{17-12\sqrt{2}};$$
$$\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[12]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt[12]{17-12\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt[12]{17-12\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1};\quad \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}.$$

Значит,

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[12]{17-12\sqrt{2}} =$$
$$= \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\right)^3 = \sqrt{2}-1.$$

Пример 6. Докажем, что $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

Пусть $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = a$. Возведем левую часть этого равенства в куб. Имеем:

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 = \sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)-$$
$$-3\left(\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} - \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2}\right) =$$
$$= 4 - 3\left(\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)} - \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(9-4\sqrt{5})}\right) =$$
$$= 4 - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) = 4 - 3a.$$

Отсюда

$$4 - 3a = a^3,$$
$$a^3 + 3a - 4 = 0.$$

Это уравнение имеет корень $a = 1$ (устанавливаем проверкой). Других корней в силу монотонности функции $y = a^3 + 3a - 4$ нет. Значит, $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$.

**866.** Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{0{,}125 \cdot 216}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; д) $\sqrt[3]{21\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{3}$;

б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0{,}0016}$; г) $\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}$; е) $\sqrt[5]{1\frac{17}{32}} \cdot \sqrt[5]{\frac{32}{49}}$.

**867.** Вычислите:

а) $\sqrt[3]{63} \cdot \sqrt[3]{147}$; в) $\sqrt[3]{8 - \sqrt{56}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$;

б) $\sqrt[4]{112} \cdot \sqrt[4]{343}$; г) $\sqrt[4]{11 + \sqrt{40}} \cdot \sqrt[4]{11 - \sqrt{40}}$.

**868.** Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{11}$ и $\sqrt[6]{119}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ и $\sqrt[3]{3}$;

б) $\sqrt[4]{27}$ и $\sqrt[3]{9}$; д) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$;

в) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{3}}$; е) $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}$ и $\sqrt[5]{9\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$.

**869.** Сравните числа с единицей:

а) $\sqrt[3]{0{,}2}$; б) $\sqrt[3]{1{,}5}$; в) $\sqrt[6]{0{,}99}$; г) $\sqrt[4]{1{,}01}$.

**870.** Найдите значение дроби:

а) $\frac{\sqrt[4]{49}}{\sqrt[4]{3}}$; в) $\frac{\sqrt[6]{729}}{\sqrt[3]{1728}}$; д) $\frac{\sqrt[6]{2\sqrt{2}}}{\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}}$;

б) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{486}}$; г) $\frac{\sqrt[5]{3125}}{\sqrt[10]{1024}}$; е) $\frac{\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}}{\sqrt[5]{5\sqrt[3]{25}}}$.

**871.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2}$, где $a \leqslant 0$; в) $\sqrt[6]{x^6y^6}$, где $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

б) $\sqrt[4]{4b^4}$, где $b \leqslant 0$;

**872.** Представьте выражение в виде дроби:

а) $\sqrt{\dfrac{81a^4}{b^2}}$, где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

б) $\sqrt[3]{\dfrac{343x^6}{125y^9}}$;

в) $\sqrt[4]{\dfrac{9c^6}{4d^4}}$, где $c \geqslant 0$ и $d > 0$;

г) $\sqrt[8]{\dfrac{b^5c^3}{a^{16}}}$;

д) $-\sqrt[6]{\dfrac{729a^{12}}{b^6}}$, где $b < 0$;

е) $\sqrt[8]{\dfrac{x^8}{250a^{16}}}$, где $x < 0$.

**873.** Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{(a-3)^4} + \sqrt{(a-6)^2}$, где $3 \leqslant a \leqslant 6$;

б) $\sqrt[6]{(b-1)^6} + \sqrt[4]{(2-b)^4} + \sqrt{(b-3)^2}$, где $2 \leqslant b \leqslant 3$;

в) $\sqrt{2x^2 - 2x + 3 - \sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}}$, где $x \leqslant 1$;

г) $\sqrt{y^3 + y^2 - y - 1}$, где $y \geqslant 1$.

**874.** Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt[3]{2}$; г) $\sqrt[4]{3}$.

**875.** Внесите множитель под знак корня:

а) $a\sqrt[3]{2}$, где $b \geqslant 0$;

б) $b\sqrt[4]{3}$, где $b < 0$;

в) $c\sqrt[3]{5}$, где $c < 0$;

г) $x\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}}$, где $x > 0$;

д) $y\sqrt[6]{\dfrac{1}{y^6} - \dfrac{1}{y^4}}$, где $b \geqslant 0$;

е) $z\sqrt[4]{\dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z^2}}$, где $z > 0$.

**876.** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{8a^2b^3}$, где $b \geqslant 0$;

б) $\sqrt[3]{54a^4b^5}$;

в) $\sqrt[6]{\dfrac{12a^7y^2}{x^{12}}}$, где $a \geqslant 0$;

г) $\sqrt[4]{\dfrac{b^4c^2}{4d^2}}$, где $b \leqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$.

**877.** Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$;

б) $\sqrt[4]{b\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}$.

**878.** Представьте в виде квадрата суммы выражение:

а) $a + 2\sqrt{a} + 1$;

б) $\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{xy^2} + y$;

в) $4x + 12\sqrt[6]{x^3y^2} + 9\sqrt[3]{y^2}$;

г) $\sqrt[3]{a^2} + 4\sqrt[6]{a^2b^3} + 4b$.

**879.** Представьте в виде куба разности выражение:

а) $a\sqrt{a} - 3a\sqrt[3]{b} + 3\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2} - b$;

б) $x - 6\sqrt[12]{x^{11}} + 12\sqrt[6]{x^5} - 8\sqrt[4]{x^3}$.

**880.** Представьте выражение в виде дроби с целым рациональным знаменателем:

а) $\dfrac{1}{b - \sqrt{x}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$;

д) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} + x}$;

е) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{y} - \sqrt{y}}$.

**881.** Найдите значение выражения

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}$$

при $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$.

**882.** Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{y}-\sqrt[4]{xy}}+\dfrac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{xy}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2y}-\sqrt[4]{xy^2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{b}+2}{\sqrt{b}-2\sqrt[4]{b}+1}+\dfrac{\sqrt[4]{b}+2}{\sqrt{b}-1}\right):\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b}+1}$;

в) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}}+\dfrac{2\sqrt[6]{x^5}}{x+2\sqrt[6]{x^5}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[5]{y^5}+2\sqrt[5]{y}+4\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^4}+4\sqrt[5]{y^2}+16}+\dfrac{8}{\sqrt[5]{y^2}-2\sqrt[5]{y}+4}$.

**883.** Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt[3]{x-5}=\sqrt[6]{(x-5)^2}$, если $x \geqslant 5$;

б) $\sqrt[3]{x-5}=-\sqrt[6]{(x-5)^2}$, если $x<5$;

в) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$;

г) $\sqrt[3]{\sqrt{50}+7}+\sqrt[3]{\sqrt{50}-7}=3$.

## Упражнения для повторения

**884.** Задайте формулой функцию, обратную данной:

а) $y=2x-1$, где $x\in[-3;\ 3]$;

б) $y=x^2-2x+2$, где $x\in(-\infty;\ 1]$.

**885.** Постройте график функции $y=x\sqrt{x}$.

**886.** Упростите выражение

$$\left(\frac{3}{25-x^2}+\frac{1}{x^2-10x+25}\right)\cdot\frac{(x-5)^2}{2}+\frac{3x}{x+5}.$$

**887.** Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 7, а сумма их квадратов равна 21. Найдите эти числа.

## 40. Степень с рациональным показателем

При введении понятия степени с целым показателем мы требовали, чтобы новое определение было таким, при котором свойства степени с натуральным показателем сохранялись. Ограничение вводилось лишь на основание степени, которое должно быть отличным от нуля.

Введем теперь понятие степени с дробным показателем, причем, давая новое определение, также будем требовать, чтобы свойства степеней с целым показателем сохранялись.

Рассмотрим известное свойство

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

где $a > 0$, $m$ и $n$ — целые числа.

Если потребовать, чтобы это свойство выполнялось также и для рациональных $m$ и $n$, то, в частности, оно должно выполняться, когда $m$ и $n$ — взаимно обратные числа.

Пусть, например, $a = 3$, $m = \frac{1}{6}$ и $n = 6$. Тогда в соответствии с этим требованием должно быть верным равенство $\left(3^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 3$.

Будем считать, что $3^{\frac{1}{6}} > 0$. Тогда в соответствии с определением арифметического корня имеем: положительное число, шестая степень которого равна 3, есть арифметический корень шестой степени из трех, т. е. $3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}$.

Вообще если $a > 0$, $n \in N$ и $a^{\frac{1}{n}} > 0$, то целесообразно считать, что $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, так как $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ и $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Так как мы условились, что свойство должно выполняться и для рациональных $m$ и $n$, то, применяя его к равенству $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, получим $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Заметим, что пока не дано определение степени с дробным показателем, такие выражения, как $3^{\frac{1}{6}}$, $a^{\frac{1}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$, не имеют смысла. Но рассуждения, проведенные выше, говорят о целесообразности такого определения.

Определение. **Если $a > 0$ и $r$ — рациональное число, записанное в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое, а $n$ — натуральное, то**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Согласно этому определению, имеем:

$$5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}, \quad 2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 10^{-\frac{1}{3}} = 10^{\frac{-1}{3}} = \sqrt[3]{10^{-1}}.$$

По определению также полагают:

**если $m$ и $n$ — натуральные числа, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.**

Значение степени с рациональным показателем $r$ не зависит от записи числа $r$ в виде дроби. Действительно, представляя число $r$ в виде дроби разными способами, мы всегда будем получать один и тот же результат.

Покажем, например, что $32^{\frac{6}{10}} = 32^{\frac{3}{5}}$:

$$32^{\frac{6}{10}} = \sqrt[10]{32^6} = \sqrt[5]{32^3} = 32^{\frac{3}{5}}.$$

Вообще пусть $a > 0$, где $r_1 = \frac{m}{n}$ и $r_2 = \frac{mk}{nk}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{N}$. Тогда $a^{r_1} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nk}} = a^{r_2}$.

В этом преобразовании мы применяли определение степени с рациональным показателем и основное свойство корня.

Давая определение степени с дробным показателем, мы исключили основание степени $a < 0$. Это ограничение необходимо. В противном случае (если $a < 0$) операция возведения числа в дробную степень становится неоднозначной. Для обоснования этого достаточно привести пример:

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1; \quad (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1,$$

т. е. $(-1)^{\frac{1}{3}} \neq (-1)^{\frac{2}{6}}$.

Покажем, что свойства степеней с целым показателем выполняются и для степеней с любым рациональным показателем.

Перечислим эти свойства.

*Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел $r_1$ и $r_2$ выполняются тождества*:

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}, \tag{1}$$

$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}, \tag{2}$$

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}. \tag{3}$$

*Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа $r$ имеют место тождества*:

$$(ab)^r = a^r b^r, \tag{4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}. \tag{5}$$

Заметим, что любое рациональное число $r$, как целое, так и дробное, всегда можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где

$m$ — целое число и $n$ — натуральное. Поэтому при доказательстве свойств степени с рациональным показателем нет необходимости рассматривать частные случаи (когда $r_1$ — целое число, $r_2$ — дробное и т. д.). Представляя рациональное число $r$ в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое число и $n$ — натуральное, мы охватываем тем самым всевозможные частные случаи.

Докажем тождество (1).

Пусть $a > 0$, $r_1$ и $r_2$ — произвольные рациональные числа. Мы всегда $r_1$ и $r_2$ можем представить в виде дробей с одним и тем же знаменателем: $r_1 = \frac{m_1}{n}$, $r_2 = \frac{m_2}{n}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $m_1 \in \boldsymbol{Z}$, и $m_2 \in \boldsymbol{Z}$.

Тогда

$$a^{r_1}a^{r_2} = a^{\frac{m_1}{n}} \cdot a^{\frac{m_2}{n}} = \sqrt[n]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n]{a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1}a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1+m_2}} =$$

$$= a^{\frac{m_1+m_2}{n}} = a^{\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}} = a^{r_1+r_2}.$$

В преобразованиях мы последовательно использовали определение степени с рациональным показателем, свойство (1) арифметического корня, свойство (1) степени с целым показателем и определение степени с рациональным показателем.

Из тождества (1) вытекает следствие:

если $a > 0$ и $r$ — рациональное число, то $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Действительно, так как $a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1$ и $a^r > 0$, то $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Докажем тождество (2).

Пусть $a > 0$, $r_1 = \frac{m}{n}$ и $r_2 = \frac{p}{q}$, и где $m$ и $p$ — целые числа, а $n$ и $q$ — натуральные.

Пусть $a^{r_1} : a^{r_2} = a^r$, т. е. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^r$. Тогда, по определению частного, $a^r \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$. Отсюда $a^{r+\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$. В силу монотонности функции $y = \sqrt[n]{x}$ (а также и функции $y = x^{\frac{1}{n}}$) заключаем, что $r + \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$. Отсюда $r = \frac{m}{n} - \frac{p}{q}$. Значит, равенство

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \text{ — тождество.}$$

Итак, $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$.

Докажем тождество (3).

Пусть $a > 0$, $r_1 = \frac{m}{n}$ и $r_2 = \frac{p}{q}$, где $m$ и $p$ — целые числа, а $n$ и $q$ — натуральные. Тогда

$$(a^{r_1})^{r_2} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^{mp}}\right)} = \sqrt[qn]{a^{mp}} =$$

$$= a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{r_1 r_2}.$$

Из тождества (3) вытекает следствие:

если $a > 0$, $r$ — рациональное число и $n$ — натуральное число, то $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$.

Действительно, пусть $r = \frac{m}{p}$, где $m$ — целое число, $p$ — натуральное. Тогда

$$\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{p}}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^m}} = \sqrt[np]{a^m} = a^{\frac{m}{np}} = a^{\frac{m}{p}\cdot\frac{1}{n}} = a^{r\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{r}{n}}.$$

Докажем тождество (4).

Пусть $a > 0$, $b > 0$ и $r = \frac{m}{n}$, где $m$ — целое число, $n$ — натуральное.

Тогда

$$(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r.$$

Докажем тождество (5).

Пусть $a > 0$, $b > 0$ и $r$ — рациональное число. Тогда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = (ab^{-1})^r = a^r b^{-r} = \frac{a^r}{b^r}.$$

Приведем примеры применения свойств степеней с рациональным показателем в преобразованиях выражений и вычислениях.

Пример 1. Найдем значение выражения $(a^4)^{\frac{1}{4}} + \left(b^{\frac{1}{8}}\right)^4$ при $a = -1{,}5$ и $b = 2{,}25$.

$$(a^4)^{\frac{1}{4}} + \left(b^{\frac{1}{8}}\right)^4 = |a| + b^{\frac{1}{2}} = |-1{,}5| + 2{,}25^{\frac{1}{2}} = 1{,}5 + 1{,}5 = 3.$$

Важно обратить внимание на то, что $(a^{2n})^{\frac{1}{2n}} = |a|$.

Пример 2. Представим выражение $a - b^{\frac{1}{2}}$, где $a \geqslant 0$, в виде произведения, используя формулы:
а) разности квадратов; б) разности кубов.

а) $a - b^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{4}}\right)$;

б) $a - b^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$.

Пример 3. Сократим дробь $\dfrac{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} + 1}$.

$$\frac{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} + 1} = \frac{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right) + \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} + 1} =$$

$$= \frac{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right) + \left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} + 1} = \frac{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)\left(1 + x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} + 1} =$$

$$= x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}.$$

Пример 4. Упростим выражение $\dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{2}} + (1 - x)^{\frac{1}{2}}}{(1 + x)^{\frac{1}{2}} - (1 - x)^{\frac{1}{2}}}$, выполнив подстановку $x = \dfrac{2b}{b^2 + 1}$, где $0 < b < 1$.

$$\frac{(1 + x)^{\frac{1}{2}} + (1 - x)^{\frac{1}{2}}}{(1 + x)^{\frac{1}{2}} - (1 - x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left((1 + x)^{\frac{1}{2}} + (1 - x)^{\frac{1}{2}}\right)\left((1 + x)^{\frac{1}{2}} + (1 - x)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left((1 + x)^{\frac{1}{2}} - (1 - x)^{\frac{1}{2}}\right)\left((1 + x)^{\frac{1}{2}} + (1 - x)^{\frac{1}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{2 + 2(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{1 + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}.$$

Подставив в выражение $1 - x^2$ вместо $x$ дробь $\dfrac{2b}{b^2 + 1}$, получим

$$\frac{(b^2 - 1)^2}{(b^2 + 1)^2}.$$

Отсюда

$$\frac{1 + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{b^2 + 1 + |b^2 - 1|}{2b} = \frac{b^2 + 1 + (1 - b^2)}{2b} = \frac{2}{2b} = \frac{1}{b}$$

(здесь учитывается, что $0 < b < 1$).

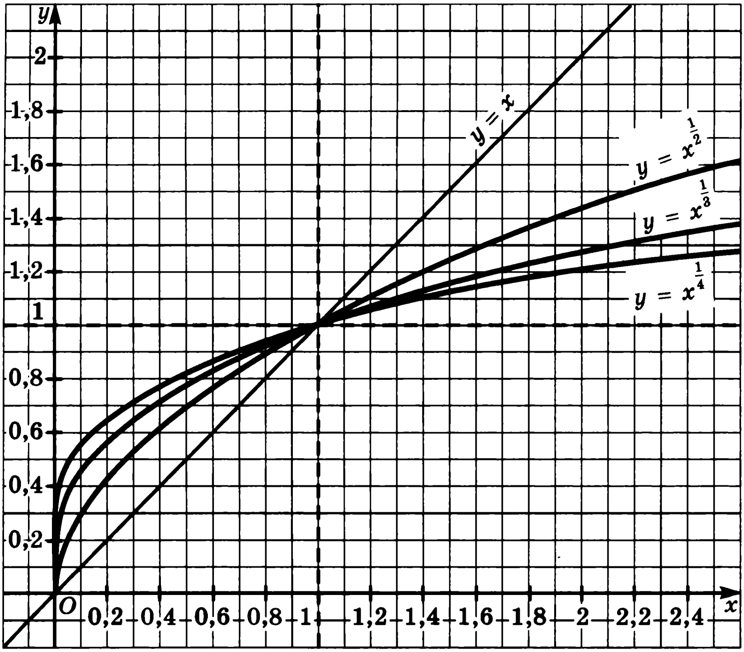



**Рис. 105**

П р и м е р 5. Построим в одной и той же системе координат графики функций $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

График функции $y = x^{\frac{1}{4}}$ ничем не отличается от графика функции $y = \sqrt[4]{x}$. А график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ имеет существенное отличие от графика функции $y = \sqrt[3]{x}$. Как вы знаете, функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена на множестве действительных чисел, а выражение $x^{\frac{1}{3}}$ имеет смысл лишь при $x \geqslant 0$. Поэтому график функции совпадает лишь с той частью графика функции $y = \sqrt[3]{x}$, где $x \geqslant 0$.

На рисунке 105 изображены графики перечисленных функций. Их особенность состоит в том, что все они проходят через точки (0; 0) и (1; 1). При этом в промежутке (0; 1) выполняется неравенство

$$x^{\frac{1}{2}} < x^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{4}} \text{ для любых } x,$$

а в промежутке (1; $+\infty$) выполняется неравенство

$$x^{\frac{1}{4}} < x^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{2}}.$$

**888.** Представьте арифметический корень в виде степени с рациональным показателем ($a > 0$, $n \in N$):

а) $\sqrt{29}$; г) $\sqrt[5]{7^{-2}}$; ж) $\sqrt[n]{(a+2)^5}$;

б) $\sqrt[3]{5^2}$; д) $\sqrt[n]{a^2}$; з) $\sqrt[n]{(a+5)^{-4}}$.

в) $\sqrt[4]{3^{-1}}$; е) $\sqrt[n]{a^{-3}}$;

**889.** Замените степень с дробным показателем арифметическим корнем:

а) $7^{\frac{1}{3}}$; д) $(x+y)^{\frac{2}{n}}$, $n \in N$;

б) $2{,}5^{0{,}3}$; е) $(a-x)^{0{,}5n}$, $n \in N$;

в) $3a^{\frac{1}{6}}$; ж) $10^{1{,}5n}$, $n \in N$;

г) $(3a)^{\frac{1}{6}}$; з) $25^{\frac{n}{10}}$, $n \in N$.

**890.** Найдите значение выражения:

а) $81^{0{,}25} + 0{,}001^{-\frac{2}{3}}$; в) $\left(\frac{16}{81}\right)^{0{,}25} - 27^{-\frac{1}{3}}$;

б) $16^{0{,}5} - (0{,}0625)^{-0{,}75}$; г) $(6561)^{\frac{1}{4}} + (1024)^{0{,}1}$.

**891.** Укажите область определения функции:

а) $y = x^{\frac{1}{3}}$; в) $y = (x+6)^{-0{,}25}$;

б) $y = (x-3)^{\frac{2}{5}}$; г) $y = \frac{1}{(x-2)^{0{,}5}}$.

**892.** Найдите область значений функции:

а) $y = x^{\frac{1}{2}}$, где $0 \leqslant x \leqslant 100$;

б) $y = x^{\frac{2}{3}}$, где $1 \leqslant x \leqslant 27$;

в) $y = (x-3)^{\frac{1}{4}}$, где $3 \leqslant x \leqslant 19$;

г) $y = (x+5)^{\frac{1}{3}}$, где $-4 \leqslant x \leqslant 22$.

**893.** Используя графики функций $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$, сравните числа:

а) $0{,}5^{\frac{1}{2}}$ и $0{,}5^{\frac{1}{3}}$;
б) $0{,}5^{\frac{1}{3}}$ и $0{,}5^{\frac{1}{4}}$;
в) $1{,}5^{\frac{1}{2}}$ и $1{,}5^{\frac{1}{3}}$;
г) $1{,}5^{\frac{1}{3}}$ и $1{,}5^{\frac{1}{4}}$.

**894.** Расположите в порядке возрастания числа:

а) $0{,}1^{\frac{1}{2}}$, $0{,}1^{\frac{1}{4}}$, $0{,}1^{\frac{1}{3}}$, $0{,}1$;
б) $0{,}5^{\frac{1}{4}}$, $0{,}5^{\frac{1}{5}}$, $0{,}5^{\frac{1}{6}}$, $0{,}5^{\frac{1}{2}}$;
в) $1{,}2^{\frac{1}{3}}$, $1{,}2^{\frac{1}{4}}$, $1{,}2^{\frac{1}{6}}$, $1{,}2^{\frac{1}{3}}$;
г) $2^{\frac{1}{8}}$, $2^{\frac{1}{7}}$, $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$.

**895.** Представьте в виде квадрата число:

а) $\sqrt{2}$; б) $3^{0,5}$; в) $2^{-1,5}$; г) $\sqrt[3]{3{,}2}$.

**896.** Представьте $a^{0,3}$ в виде:

а) квадрата;
б) куба;
в) седьмой степени;
г) $n$-й степени.

**897.** Зная, что $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$, где $a \geqslant 0$, найдите, используя калькулятор, приближенные значения корней с тремя знаками после запятой:

а) $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[4]{5}$; в) $\sqrt[4]{7}$; г) $\sqrt[4]{19}$.

**898.** Упростите выражение:

а) $\left(16a^{\frac{2}{3}}b^{-2}\right)^{\frac{3}{4}}$; б) $(0{,}027x^{-0,6}y^{-1,5})^{-\frac{2}{3}}$; в) $\left(\dfrac{243a^{-5}}{32b^{2,5}}\right)^{-0,2}$.

**899.** Сократите дробь:

а) $\dfrac{a - 3a^{\frac{1}{2}}}{a + 3a^{\frac{1}{2}}}$;

б) $\dfrac{x^{1,5} - y^{1,5}}{xy^{0,5} - x^{0,5}y}$;

в) $\dfrac{x^{1,5} + y^{1,5}}{x^{1,5} - xy^{0,5} + x^{0,5}y}$;

г) $\dfrac{b - b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}} - 1}$;

д) $\dfrac{c^{0,6} + d^{0,9}}{c^{0,2} + d^{0,3}}$;

е) $\dfrac{a + b}{a - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$.

**900.** Докажите, что значение выражения не зависит от $n$ ($n \in Z$):

а) $\dfrac{(25^n - 5^{2n-2})^{\frac{1}{2}}}{(125^{n-1} - 61 \cdot 5^{3n-6})^{\frac{1}{3}}}$; б) $\dfrac{(16^{n-1} - 16^{n-2})^{\frac{1}{4}}}{(8^{n-2} + 7 \cdot 8^{n-3})^{\frac{1}{3}}}$.

**901.** Докажите, что значение выражения является целым числом:

а) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(4 + \sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{6}}$;

б) $5^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 + \sqrt{6}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(7 - 2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{6}}$;

в) $\sqrt[3]{1 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - 2\sqrt{2}}$;

г) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

**902.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{x + x^{0,8} + x^{0,6} + x^{0,4}}{x^{0,8} + x^{0,6} + x^{0,4} + x^{0,2}}$; б) $\dfrac{y^{\frac{6}{7}} + y^{\frac{5}{7}} + y^{\frac{4}{7}} + y^{\frac{3}{7}}}{y^{\frac{3}{7}} + y^{\frac{2}{7}} + y^{\frac{1}{7}} + 1}$.

**903.** Упростите выражение $\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, если $x = 4(a - 1)$, рассмотрев случаи, когда:

а) $1 < a < 2$; б) $a > 2$.

**904.** Упростите выражение $\left(x^{\frac{1}{m}} + x^{\frac{1}{n}}\right)^2 - 4a^2 x^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$, если $x = \left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)^{\frac{2mn}{m-n}}$, $m$ и $n$ — натуральные числа, причем $m \neq n$.

**905.** Зная, что $n$ — натуральное число, большее 1, упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{125^n - 61 \cdot 125^{n-1}}$; б) $\sqrt[4]{81^{n+1} - 65 \cdot 81^n}$.

**906.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{1,25} + 2a + 4a^{0,75}}{a + 4a^{0,5} + 16} + \dfrac{8}{a^{0,5} - 2a^{0,25} + 4}$;

б) $\dfrac{b^{0,5} - 10b^{0,25} + 21}{c^{0,5} + 11c^{0,25} + 30} : \left(\dfrac{c^{0,5} - 36}{b^{0,5} - 49}\right)^{-1}$;

в) $\left(\dfrac{2x - 16x^{0,5} + 32}{x^{0,5}}\right)^{-1} : \left(\dfrac{x^{0,5}}{2x^{0,5} - 8} + \dfrac{8}{x + 4x^{0,5}} - \dfrac{x + 16}{2x - 32}\right)$;

г) $\left(\dfrac{4y^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4y^{\frac{1}{2}}}}{1 + \sqrt{1 - 4y^{\frac{1}{2}}}} - \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4y^{\frac{1}{2}}}}{1 - \sqrt{1 - 4y^{\frac{1}{2}}}}\right)$.

**907.** Вычислите

$$\left((29 + 4 \cdot 7^{0,5})^{\frac{1}{6}} - (1 + 2 \cdot 7^{0,5})^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[10]{231 + \sqrt[7]{12}}.$$

**908.** Упростите выражение:

а) $\left(\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1} - \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2\right) \cdot \left(\sqrt{b}\right)^{-1};$

б) $\left(\dfrac{2 + x^{\frac{1}{4}}}{2 - x^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{2 - x^{\frac{1}{4}}}{2 + x^{\frac{1}{4}}}\right) \cdot \dfrac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}};$

в) $\left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}} - a}{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}}} + a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(x + a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} - a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}};$

г) $\left(\dfrac{(a^{0,5} + b^{0,5})}{(a + b)^{0,5}} - \dfrac{(a + b)^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}\right)^{-2} - \dfrac{1 + b}{2\sqrt{ab}}.$

**909.** Докажите, что значение выражения

$$\frac{\left(x^2 + y\sqrt{xy} + x\sqrt{xy} + y^2\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{-2} - \sqrt{xy}}{x - y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

при всех допустимых значениях переменных не зависит от $x$ и $y$.

**910.** Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{\dfrac{1 - \sqrt[4]{x^3}}{1 - \sqrt[4]{x}} - \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\dfrac{\sqrt[4]{x^{-1}} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^{-1}}} - \sqrt{x}}\right)^5$$

при всех допустимых значениях переменной не зависит от $x$.

**911.** Докажите, что при любом натуральном $n$ верно равенство

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

**912.** Докажите, что выражение

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$$

равно $2\sqrt{x - 1}$, если $x > 2$, и равно 2, если $x \leqslant 2$.

## Упражнения для повторения

**913.** Используя свойства монотонности, решите уравнение:
а) $x^5 + x^3 + x - 5 = 37$;
б) $\sqrt[5]{4x} + \sqrt[3]{x} + x - 2 = 10$.

**914.** Решите неравенство:
а) $(x^2 - 4)(x + 1)(x - 8) > 0$;
б) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 25} \leqslant 0$.

**915.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21, \\ x + \sqrt{xy} + y = 7. \end{cases}$$

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Что называется арифметическим корнем?

**2.** Перечислите свойства арифметического корня и докажите одно из них.

**3.** Дайте определение степени с рациональным показателем.

**4.** Сформулируйте свойства степени с рациональным показателем. Докажите свойство $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ для случая, когда $r_1 \in N$, $r_2$ — дробное число.

# § 16. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

## 41. Решение иррациональных уравнений

Рассмотрим уравнения:

$$\sqrt{x - 2} = 5, \qquad (1)$$

$$\sqrt[5]{x^2 - 8} + \sqrt[3]{x + 24} = 4, \qquad (2)$$

$$x^2 - 2\sqrt{5}x + 3 = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} - 3} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + 3} = \frac{5}{8}. \qquad (4)$$

Уравнения (1) и (2) содержат переменную под знаком корня, в уравнении (4) переменная входит в основание степени с дробным показателем. Такие уравнения называют *иррациональными уравнениями*.

Уравнение (3) не является иррациональным уравнением, хотя в этом уравнении и есть иррациональный множитель $-2\sqrt{5}$, но он является числовым коэффициентом рационального уравнения.

При решении иррациональных уравнений стремятся к тому, чтобы это уравнение заменить равносильным ему рациональным уравнением или равносильной ему системой, состоящей из рационального уравнения и рациональных неравенств.

Сначала рассмотрим решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$, где $f(x)$ — рациональное выражение и $a$ — некоторое число.

Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = a$ при четном $n$ и $a < 0$ не имеет корней, при $a \geqslant 0$ оно равносильно уравнению $f(x) = a^n$. Это следует из определения арифметического корня.

Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = a$ при нечетном $n$ и любом $a$ равносильно уравнению $f(x) = a^n$. Это вытекает из определения корня нечетной степени.

Приведем примеры решения таких уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $\sqrt[4]{x^2 + 9x + 29} = 3$.

Возведем обе части этого уравнения в четвертую степень. Получим уравнение, равносильное данному:

$$x^2 + 9x + 29 = 81.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем его корни: $x_1 = -13$; $x_2 = 4$.

Ответ: $-13$; $4$.

Пример 2. Найдем корни уравнения $\sqrt[3]{2x^2 - x - 7} = 2$.

Возведем обе части уравнения в куб. Получим уравнение

$$2x^2 - x - 7 = 8,$$

равносильное исходному. Его корнями являются числа $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 3$.

Ответ: $-2{,}5$; $3$.

Рассмотрим способы решения уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения.

Докажем, что *уравнение*

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \qquad (5)$$

*где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения и $n$ — четное число, равносильно системе*

$$\begin{cases} f(x) = g^n(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $x_1$ — корень уравнения (5). Тогда верно равенство $\sqrt[n]{f(x_1)} = g(x_1)$. Так как при четном $n$ число $\sqrt[n]{f(x_1)}$ неотрицательное, то и равное ему число $g(x_1)$ неотрицательное. Следовательно, если уравнение (5) имеет корень $x = x_1$, то это число удовлетворяет и системе (6).

Верно и обратное. Пусть $x_2$ — число, которое удовлетворяет системе (6), т. е. $f(x_2) = g^n(x_2)$ — верное равенство и $g(x_2) \geqslant 0$ — верное неравенство. Тогда, по определению корня четной степени (т. е. арифметического корня), верно равенство $\sqrt[n]{f(x_2)} = g(x_2)$.

Значит, каждое решение уравнения (5) является решением системы (6), и наоборот, каждое решение системы (6) является решением уравнения (5). А это означает, что уравнение (5) и система (6) равносильны.

Пример 3. Решим уравнение $\sqrt{2x - 3} = 4 - x$.

По доказанному выше это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 3 = (4 - x)^2, \\ 4 - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение $2x - 3 = (4 - x)^2$ после преобразований примет вид $x^2 - 10x + 19 = 0$. Решив это уравнение, найдем его корни: $x_1 = 5 - \sqrt{6}$, $x_2 = 5 + \sqrt{6}$. Первый корень удовлетворяет неравенству $4 - x \geqslant 0$, а второй — не удовлетворяет ему. Значит, уравнение $\sqrt{2x - 3} = 4 - x$ имеет единственный корень — число $5 - \sqrt{6}$.

Ответ: $5 - \sqrt{6}$.

Докажем, что *уравнение*

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \qquad (7)$$

*где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения и $n$ — нечетное число, большее 1, равносильно уравнению*

$$f(x) = g^n(x). \qquad (8)$$

Доказательство. Пусть $x_1$ — корень уравнения (7). Тогда верно равенство $\sqrt[n]{f(x_1)} = g(x_1)$. Возведем левую и правую части этого равенства в $n$-ю степень. Получим верное равенство $f(x_1) = g^n(x_1)$. Значит, $x_1$ — корень уравнения (8).

Верно и обратное. Если $x_2$ — корень уравнения (8), то верно равенство $f(x_2) = g^n(x_2)$. Тогда по определению корня нечетной степени верно равенство $\sqrt[n]{f(x_2)} = g(x_2)$, т. е. $x_2$ — корень уравнения (7).

Значит, уравнения (7) и (8) равносильны.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt[3]{3x^2 + 6x - 25} = 1 - x$.

Возведем обе части уравнения в куб и приведем полученные уравнения к стандартному виду:

$$3x^2 + 6x - 25 = (1 - x)^3,$$
$$3x^2 + 6x - 25 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3,$$
$$x^3 + 9x - 26 = 0.$$

Число 2 является делителем свободного члена кубического уравнения и обращает его левую часть в нуль, значит, 2 — корень этого уравнения.

Других корней это уравнение не имеет, так как $y = x^3 + 9x - 26$ — монотонная функция.

Ответ: 2.

Рассмотрим теперь решение уравнений, в которые входят два радикала.

Пример 5. Решим уравнение $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{13 - 3x} = 2$.

Найдем область определения $X$ уравнения. Для этого решим систему

$$\begin{cases} 5x + 1 \geqslant 0, \\ 13 - 3x \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда $X = \left[-\frac{1}{5};\ 4\frac{1}{3}\right]$.

Перенесем $-\sqrt{13 - 3x}$ в правую часть уравнения:

$$\sqrt{5x + 1} = 2 + \sqrt{13 - 3x}.$$

Обе части этого уравнения при любых значениях $x \in X$ — неотрицательные числа. Поэтому, возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение, равносильное данному.

Имеем:

$$5x + 1 = 4 + 13 - 3x + 4\sqrt{13 - 3x},$$
$$8x - 16 = 4\sqrt{13 - 3x},$$
$$2x - 4 = \sqrt{13 - 3x}.$$

Согласно доказанному выше, уравнение $2x - 4 = \sqrt{13 - 3x}$ равносильно системе

$$\begin{cases}(2x - 4)^2 = 13 - 3x,\\ 2x - 4 \geqslant 0.\end{cases}$$

Решим уравнение этой системы:

$$4x^2 - 16x + 16 = 13 - 3x,$$
$$4x^2 - 13x + 3 = 0.$$
$$x_1 = \frac{1}{4};\ x_2 = 3.$$

Неравенству $2x - 4 \geqslant 0$ удовлетворяет лишь корень $x_2 = 3$.

Ответ: 3.

Заметим, что уравнение $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{13 - 3x} = 2$ можно решить, используя свойства монотонных функций. Действительно, функция $y = \sqrt{5x + 1} - \sqrt{13 - 3x}$ возрастающая. (Докажите это.) Поэтому данное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим, что число 3 — корень этого уравнения.

Иногда, чтобы решить иррациональное уравнение, целесообразно ввести новые переменные, сведя данное уравнение к более простому рациональному уравнению или системе рациональных уравнений с несколькими переменными.

Пример 6. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{x + 6} + \sqrt{11 - x} = 5.$$

Пусть $\sqrt[3]{x + 6} = u$, а $\sqrt{11 - x} = v$. Тогда $u^3 = x + 6$ и $v^2 = 11 - x$, причем $v \geqslant 0$. Имеем систему трех уравнений:

$$\begin{cases}u^3 = x + 6,\\ v^2 = 11 - x,\\ u + v = 5.\end{cases}$$

Сложив первое и второе уравнения системы, получим уравнение $u^3 + v^2 = 17$.

Решим систему

$$\begin{cases}u^3 + v^2 = 17,\\ u + v = 5.\end{cases}$$

Выразив $v$ через $u$ из второго уравнения и подставив значение $v$ в первое уравнение, получим

$$u^3 + u^2 - 10u + 8 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем его корни: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = -4$. Отсюда $v_1 = 4$, $v_2 = 3$, $v_3 = 9$. Каждое значение $v$ удовлетворяет условию $v \geqslant 0$. Подставив значения $u_1$, $u_2$ и $u_3$ в уравнение $u^3 = x + 6$, найдем корни данного уравнения:

$$x_1 = -5,\ x_2 = 2,\ x_3 = -70.$$

Ответ: $-5$; $2$; $-70$.

Пример 7. Найдем корни уравнения

$$6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

Найдем множество $X$, в котором могут находиться корни уравнения.

Решив неравенство $(x-2)(x-3) \geqslant 0$, найдем область определения уравнения: $(-\infty;\ 2] \cup [3;\ +\infty)$.

Числа, принадлежащие промежутку $(-\infty;\ 2]$, не могут быть корнями уравнения, так как при $x \leqslant 2$ левая часть уравнения отрицательна, а правая неотрицательна. Кроме того, легко проверить, что не удовлетворяет уравнению и число 3. Значит, множество $X$, которому могут принадлежать корни уравнения, есть промежуток $(3;\ +\infty)$, т. е. $X = (3;\ +\infty)$.

Учитывая, что $x \neq 2$ и $x \neq 3$, можно обе части уравнения разделить на $\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$. Имеем

$$\frac{6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}} = 5.$$

Так как $x > 3$, то верны равенства $\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[6]{(x-3)^2}$ и $\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[6]{(x-2)^2}$. Отсюда

$$\frac{6\sqrt[6]{(x-3)^2} + \sqrt[6]{(x-2)^2}}{\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}} = 5.$$

Разделив почленно каждое слагаемое числителя на знаменатель, получим уравнение

$$6\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}} + \sqrt[6]{\frac{x-2}{x-3}} = 5,$$

равносильное данному.

Введем новую переменную. Пусть $y = \sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}$, тогда $\sqrt[6]{\frac{x-2}{x-3}} = \frac{1}{y}$, причем $y > 0$.

Отсюда

$$6y + \frac{1}{y} = 5,$$

$$6y^2 - 5y + 1 = 0,$$

$$y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{3}.$$

Оба корня $y_1$ и $y_2$ — положительные числа, поэтому удовлетворяют условию $y > 0$.

Далее имеем:

$$\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}} = \frac{1}{2}, \qquad \sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{x-3}{x-2} = \frac{1}{64}, \qquad \frac{x-3}{x-2} = \frac{1}{729},$$

$$64x - 192 = x - 2, \qquad 729x - 2187 = x - 2,$$

$$63x = 190, \qquad 728x = 2185,$$

$$x_1 = 3\frac{1}{190}; \qquad x_2 = 3\frac{1}{728}.$$

Каждый корень $x_1$ и $x_2$ принадлежит множеству $X$.

Ответ: $3\frac{1}{190}$; $3\frac{1}{728}$.

**916.** Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{x^2 - 9} = 2$;

б) $\sqrt[4]{x^3 - 44} = 3$;

в) $\sqrt[3]{x^2 - 4x + 24} = 3$;

г) $\sqrt[3]{6x + 1} = -5$;

д) $\sqrt{x^3 - 2x + 4} = 5$;

е) $\sqrt[5]{x^3 - 32} = 2$.

**917.** Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{x - 2} = x - 4$;

б) $\sqrt{x - 2} = 4 - x$;

в) $\sqrt{3x + 1} = x - 3$;

г) $\sqrt[3]{3x^2 + 8x + 10} = x$;

д) $\sqrt[3]{28 - 23x - x^3} = 3 - x$;

е) $\sqrt[4]{6x^2 - 4x + 1} = 1 - x$.

**918.** Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $\sqrt{x - 7} = 3 - x$;

б) $\sqrt{x - 8} = \sqrt{6 - x} = 1$;

в) $\sqrt{2x - 7} + 2x = \sqrt{56 - 16x}$;

г) $\sqrt{x - 4} + \sqrt[4]{2x - 16} + \sqrt[6]{30 - 6x} = 3$.

**919.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$;

б) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$;

в) $\sqrt{3x+4}-3=\sqrt{x-3}$;

г) $\sqrt{5x+2}-2=\sqrt{5x-10}$.

**920.** Используя свойства монотонных функций, найдите подбором корни уравнения:

а) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x+13}=9$;

б) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x-4}+\sqrt{6x+1}=11$;

в) $\sqrt{x+17}+\sqrt{2x+11}+\sqrt{3x+7}+\sqrt{4x+5}=10$.

**921.** Решите уравнение:

а) $x^{\frac{1}{2}}-10x^{\frac{1}{4}}+9=0$;

б) $x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{4}}-10=0$;

в) $x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{6}}-24=0$;

г) $x^{\frac{1}{3}}-6x^{\frac{1}{6}}+8=0$;

д) $\sqrt[3]{x-6}+\sqrt{7-x}=1$;

е) $\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{1-x}=3$;

ж) $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{7-x}=3$;

з) $\sqrt{x+2}-\sqrt[4]{x-1}=1$.

**922.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{4+x\sqrt{x^2+40}}=x+2$;

б) $\sqrt{9-x\sqrt{x^2-18}}=x-3$;

в) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=2$;

г) $\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}}=4$.

**923.** Докажите, что уравнение

$$\sqrt[4]{2x-3}-5x=\sqrt[4]{27-18x}-7{,}5$$

имеет единственный корень, и найдите его.

**924.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}}=\dfrac{7}{12}$;

б) $\sqrt{\dfrac{x-4}{2x+15}}+\sqrt{\dfrac{2x+15}{x-4}}=5\dfrac{1}{5}$;

в) $\sqrt{x^2-2x+9}+\sqrt{x^2-2x+16}=7$;

г) $\sqrt{\dfrac{6x}{x+1{,}5}}+\sqrt{\dfrac{x+1{,}5}{6x}}=2{,}5$.

**925.** Решите уравнение:

а) $\dfrac{(30 - x)\sqrt{x - 1} - (x - 1)\sqrt{30 - x}}{\sqrt{30 - x} - \sqrt{x - 1}} = 10;$

б) $\dfrac{(26 - x)\sqrt{x - 6} - (x - 6)\sqrt{26 - x}}{\sqrt{26 - x} - \sqrt{x - 6}} = 8.$

**926.** Найдите корни уравнения:

а) $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{13}(x + x^{-1});$

б) $x^{\frac{1}{3}}(x + 19)^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 2\dfrac{1}{6}.$

**927.** Решите уравнение:

а) $5\sqrt[4]{x - 1} + |x + 7| = 8;$ б) $4\sqrt{x + 3} + |x + 4| = 6.$

**928.** Найдите корни уравнения:

а) $(x^2 - 25)\sqrt{x^2 + 3x - 28} = 0;$

б) $(x^2 - 9)\sqrt{6 + x - x^2} = 0;$

в) $(x^2 + x - 72)\sqrt[4]{\dfrac{x + 9}{x - 9}} = 0;$

г) $(x^4 - 16)\sqrt[4]{x^3 - 4x} = 0.$

**929.** Решите уравнение:

а) $(x^2 - 6x + 9)^{0,5} + (x^2 - 2x + 1)^{0,5} = 4;$

б) $\sqrt{x + 2 - 4\sqrt{x - 2}} = 1.$

## Упражнения для повторения

**930.** Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 7, \text{ если } x < -2, \\ -x^2 + 1, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2x - 7, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Найдите нули функции и промежутки, на которых $f(x) < 0$ и $f(x) > 0$; промежутки, на которых функция $f$ убывает, возрастает.

**931.** Решите неравенство:
а) $|2x - 1| < 1$;  б) $|3x - 2| > 7$.

**932.** При каких значениях параметра $a$ уравнение

$$a^2x + ax - 12 = 0$$

имеет положительный корень?

**933.** Докажите тождество

$$\frac{\left(\sqrt[2001]{a^{29}}\right)^{23} + \left(\sqrt[2001]{a^{23}}\right)^{29}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = 1.$$

## 42. Решение иррациональных неравенств

К иррациональным неравенствам, так же как и к иррациональным уравнениям, относят те неравенства, которые содержат переменную под знаком корня или в которых переменная входит в основание степени с дробным показателем.

Основная цель при решении иррациональных неравенств состоит в том, чтобы иррациональное неравенство свести к равносильному ему рациональному неравенству или равносильной системе, содержащей рациональные неравенства.

Для обоснования равносильности проводимых преобразований будем использовать теоремы.

Теорема 1. **Если $0 \leqslant a < b$ и $n \in N$, то $a^n < b^n$; если $a < b$ и $n$ — нечетное число, то $a^n < b^n$.**

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^n$, где $n \in N$ и $x \geqslant 0$. Эта функция возрастающая. По условию $0 \leqslant a < b$. Значит, $\varphi(a) < \varphi(b)$, т. е. $a^n < b^n$.

В случае нечетного $n$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^n$, где $x \in R$. Так как эта функция возрастающая, то из условия, что $a < b$, следует $\varphi(a) < \varphi(b)$, т. е. $a^n < b^n$.

Теорема 2. **Если $0 \leqslant a < b$ и $n \in N$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$; если $a < b$ и $n$ — нечетное число, большее 1, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.**

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = \sqrt[n]{x}$, где $x \geqslant 0$. Эта функция возрастающая, поэтому если $0 \leqslant a < b$, то $h(a) < h(b)$, т. е. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

В случае нечетного $n$ функция $h(x) = \sqrt[n]{x}$ является возрастающей на множестве $R$. Поэтому если $a < b$, то $h(a) < h(b)$, т. е. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Начнем с простейших неравенств вида $\sqrt[n]{f(x)} < a$ и $\sqrt[n]{f(x)} > a$. Сначала рассмотрим случай, когда $n$ — четное число.

Докажем, что если $n$ — четное число и $a > 0$, то неравенство

$$\sqrt[n]{f(x)} < a \tag{1}$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a^n, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

а неравенство

$$\sqrt[n]{f(x)} > a \tag{3}$$

равносильно неравенству

$$f(x) > a^n. \tag{4}$$

Пусть $x_1$ — решение неравенства (1). Тогда верно неравенство $\sqrt[n]{f(x_1)} < a$. Отсюда следует, что $f(x_1) \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{f(x_1)} \geqslant 0$. Применяя к неравенству $\sqrt[n]{f(x_1)} < a$ теорему 1, получим $\left(\sqrt[n]{f(x_1)}\right)^n < a^n$. т. е. $f(x_1) < a^n$. Значит, $x_1$ — решение системы (2).

Верно и обратное. Пусть $x_2$ — решение системы (2). Это означает, что $f(x_2) < a^n$ и $f(x_2) \geqslant 0$ — верные неравенства. Применяя к неравенству $f(x_2) < a^n$ теорему 2, получим $\sqrt[n]{f(x_2)} < a$, т. е. $x_2$ — решение неравенства (1).

Значит, каждое решение неравенства (1) является решением системы (2), и наоборот, т. е. неравенство (1) и система (2) равносильны.

Аналогично доказывается, что неравенство (3) равносильно неравенству (4).

Заметим, что неравенство (1) и система (2) равносильны и в том случае, когда $f(x) < 0$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$ (как, например, выражение $-x^2 - 1$). В этом случае неравенство (1) и система (2) не имеют решений.

Неравенство (1) не имеет решений и в случае, когда $a < 0$, а неравенство (3) в этом случае равносильно неравенству $f(x) \geqslant 0$.

Пример 1. Решим неравенство:

а) $\sqrt{x-2} < 3$; б) $\sqrt[4]{6-2x} \geqslant 1$.

а) Неравенство $\sqrt{x-2} < 3$ равносильно системе

$$\begin{cases} x - 2 < 9, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что $2 \leqslant x < 11$.

б) Неравенство $\sqrt[4]{6 - 2x} \geqslant 1$ равносильно неравенству

$$6 - 2x \geqslant 1.$$

Отсюда $x \leqslant 2{,}5$.

О т в е т: а) $[2; 11)$; б) $(-\infty; 2{,}5]$.

Рассмотрим теперь случай, когда $n$ — нечетное число. Если $n$ — нечетное число, то неравенство

$$\sqrt[n]{f(x)} < a$$

равносильно неравенству

$$f(x) < a^n,$$

а неравенство

$$\sqrt[n]{f(x)} > a$$

равносильно неравенству

$$f(x) > a^n.$$

Это легко доказать, применяя к этим неравенствам теоремы 1 и 2.

П р и м е р 2. Решим неравенство:

а) $\sqrt[3]{x^2 - 7x} < 2$; б) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{x - 2}} > 1$.

а) Возведем обе части неравенства $\sqrt[3]{x^2 - 7x} < 2$ в куб. Получим неравенство $x^2 - 7x < 8$, равносильное данному. Решив это неравенство, найдем, что $-1 < x < 8$.

б) Возведем обе части неравенства $\sqrt[5]{\dfrac{1}{x - 2}} > 1$ в пятую степень.

Получим равносильное ему неравенство $\dfrac{1}{x - 2} > 1$. Решив его, найдем, что $2 < x < 3$.

О т в е т: а) $(-1; 8)$; б) $(2; 3)$.

Перейдем теперь к случаю, когда неравенства имеют вид $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения.

Докажем, что неравенство

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x), \tag{5}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения и $n$ — четное число, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^n(x). \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $x_1$ — решение неравенства (5). Тогда верно неравенство $\sqrt[n]{f(x_1)} < g(x_1)$. Число $g(x_1)$ не может быть отрицательным или равным нулю, так как в этом случае получилось бы неверное неравенство $\sqrt[n]{f(x_1)} < g(x_1)$, в котором $\sqrt[n]{f(x_1)} \geqslant 0$, а $g(x_1) \leqslant 0$. Значит, $g(x_1) > 0$. Кроме того, так как $n$ — четное число, то $f(x_1) \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{f(x_1)} \geqslant 0$. Применив к неравенству $\sqrt[n]{f(x_1)} < g(x_1)$ теорему 1, получим верное неравенство $f(x_1) < g^n(x_1)$. Следовательно, $x_1$ — решение системы (6).

Верно и обратное. Пусть $x_2$ — решение системы (6). Тогда верны неравенства $f(x_2) \geqslant 0$, $g(x_2) > 0$ и $f(x_2) < g^n(x_2)$. Значит, можно применить теорему 2. Получим верное неравенство $\sqrt[n]{f(x_2)} < g(x_2)$.

Итак, каждое решение неравенства (5) является решением системы (6), и наоборот, т. е. неравенство (5) и система (6) равносильны.

Пример 3. Решим неравенство $\sqrt{2x - 5} < 4 - x$.

Согласно доказанному выше это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 5 \geqslant 0, \\ 4 - x > 0, \\ 2x - 5 < (4 - x)^2. \end{cases}$$

Решив каждое неравенство системы, найдем, что множеством решений первого неравенства является промежуток $[2{,}5; +\infty)$, второго — промежуток $(-\infty; 4)$, третьего — множество $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$.

Найдем пересечение этих множеств. Получим промежуток $[2{,}5; 3)$ — множество решений системы.

Ответ: $[2{,}5; 3)$.

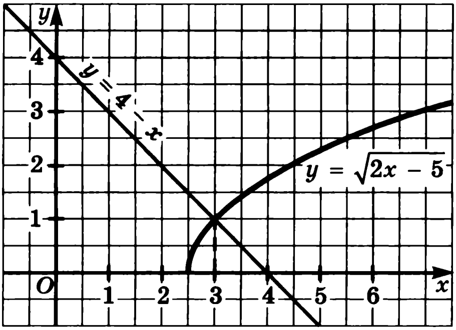



**Рис. 106**

Неравенство $\sqrt{2x-5} < 4 - x$ можно решить, воспользовавшись графиками функций $y = \sqrt{2x-5}$ и $y = 4 - x$ (рис. 106). Первая функция возрастает, а вторая — убывает. Графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой равна 3. Поэтому решениями неравенства являются все значения $x$, при которых график функции $y = \sqrt{2x-5}$ расположен ниже графика функции $y = 4 - x$.

Докажем теперь, что неравенство

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x), \tag{7}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения и $n$ — четное число, равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

или

$$\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^n(x). \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $x_1$ — решение неравенства (7), т. е. $\sqrt[n]{f(x_1)} > g(x_1)$ — верное неравенство. Это неравенство является верным в двух случаях: 1) когда $g(x_1) < 0$ и $f(x_1) \geqslant 0$ или 2) когда $g(x_1) \geqslant 0$ и $f(x_1) > g^n(x_1)$. В первом случае неравенство $\sqrt[n]{f(x_1)} > g(x_1)$ верное, так как неотрицательное число больше отрицательного. Во втором случае неравенство $\sqrt[n]{f(x_1)} > g(x_1)$ верно, так как к нему применима теорема 1. Значит, каждое решение неравенства (7) является решением системы (8) или решением системы (9), т. е. является решением совокупности этих систем.

Верно и обратное. Пусть $x_2$ — решение системы (8) или системы (9). Тогда если верны неравенства $g(x_2) < 0$ и $f(x_2) \geqslant 0$, то $x_2$ является решением неравенства (7). Если верны неравенства $g(x_2) \geqslant 0$ и $f(x_1) > g^n(x_1)$, то по теореме 2 верно и неравенство $\sqrt[n]{f(x_2)} > g(x_2)$. Значит, каждое решение неравенства (7) является решением совокупности систем (8) и (9), и наоборот, каждое решение системы (8) или системы (9) является решением неравенства (7). Следовательно, неравенство (7) равносильно совокупности двух систем (8) и (9).

Пример 4. Решим неравенство $\sqrt{6x-1} > 2 - x$.

По доказанному выше это неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} 2 - x < 0, \\ 6x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2 - x \geqslant 0, \\ 6x - 1 > (2 - x)^2. \end{cases}$$

Решив первую систему, найдем множество ее решений — промежуток $(2; +\infty)$. Решив вторую систему, найдем множество ее решений — $(5 - 2\sqrt{5}; 2]$. Решениями совокупности систем является объединение этих множеств:

$$(2; +\infty) \cup (5 - 2\sqrt{5}; 2] = (5 - 2\sqrt{5}; +\infty).$$

Ответ: $(5 - 2\sqrt{5}; +\infty)$.

На рисунке 107 приведена графическая иллюстрация решения неравенства $\sqrt{6x-1} > 2 - x$.

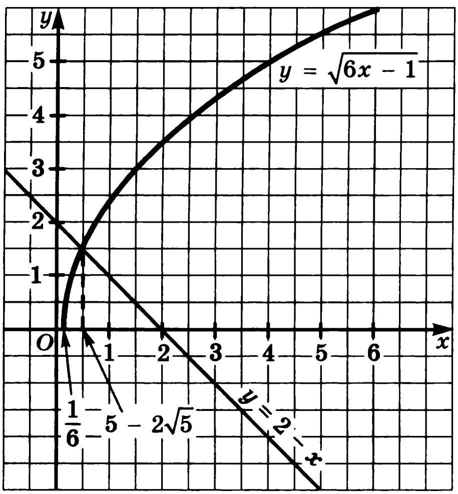



Рис. 107

Рассмотрим теперь решение неравенств вида $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения и $n$ — нечетное число, большее 1.

Неравенство

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \tag{10}$$

равносильно неравенству

$$f(x) < g^n(x), \tag{11}$$

а неравенство

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \tag{12}$$

равносильно неравенству

$$f(x) > g^n(x). \tag{13}$$

Докажем равносильность неравенств (10) и (11).

Если $x_1$ — решение неравенства (10), то верно неравенство $\sqrt[n]{f(x_1)} < g(x_1)$. По теореме 1 является верным и неравенство $f(x_1) < g^n(x_1)$.

Верно и обратное. Если $x_2$ — решение неравенства (11), то верно неравенство $f(x_2) < g^n(x_2)$. По теореме 2 верно и неравенство $\sqrt[n]{f(x_2)} < g(x_2)$.

Значит, неравенства (10) и (11) равносильны.

Аналогично доказывается равносильность неравенств (12) и (13).

П р и м е р 5. Решим неравенство $\sqrt[3]{7 - x^3} < 1 - x$.

Возведем обе части неравенства в куб. Получим неравенство $7 - x^3 < (1 - x)^3$, равносильное исходному. Выполнив преобразования, получим неравенство

$$x^2 - x - 2 > 0.$$

Решив его, найдем, что $x < -1$ или $x > 2$.

О т в е т: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

П р и м е р 6. Решим неравенство $\sqrt[3]{6x^2 + 25x + 8} > 2 + x$.

Возведем обе части неравенства в куб. Получим неравенство $6x^2 + 25x + 8 > (2 + x)^3$, равносильное данному. Выполнив преобразования, получим неравенство

$$x^3 - 13x < 0.$$

Представив это неравенство в виде

$$x\left(x - \sqrt{13}\right)\left(x + \sqrt{13}\right) < 0$$

и применив метод интервалов, найдем, что

$$x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{13}\right) \cup \left(0;\ \sqrt{13}\right).$$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\sqrt{13}\right) \cup \left(0;\ \sqrt{13}\right)$.

Рассмотрим другие примеры неравенств.

Пример 7. Решим неравенство $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} \geqslant \frac{1}{\sqrt{13}}$.

Найдем множество $X$, на котором выражение $\sqrt{1-x} - \sqrt{x}$ принимает положительные значения. Для этого решим систему

$$\begin{cases} 1 - x \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{x} > 0. \end{cases}$$

Получим $X = \left[0;\ \frac{1}{2}\right)$.

Учитывая, что при $x \in X$ выражение $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > 0$, возведем обе части данного неравенства в квадрат. Имеем:

$$\left(\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$1 - 2\sqrt{x - x^2} \geqslant \frac{1}{3},$$

$$\sqrt{x - x^2} \leqslant \frac{1}{3}.$$

При выполнении условия, что $x \in X$, выражение $x - x^2 \geqslant 0$. Поэтому обе части полученного неравенства неотрицательны и их можно возвести в квадрат. Получим

$$x - x^2 \leqslant \frac{1}{9},$$

$$9x^2 - 9x + 1 \geqslant 0.$$

Решения этого неравенства образуют множество

$$X_1 = \left(-\infty;\ \frac{3-\sqrt{5}}{6}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{6};\ +\infty\right).$$

Чтобы найти множество решений данного неравенства, нужно найти те значения переменной $x$, при которых $x \in X$ и $x \in X_1$.

Найдем пересечение множеств $X$ и $X_1$.

Так как $\frac{3-\sqrt{5}}{6} < \frac{1}{2}$ и $\frac{3+\sqrt{5}}{6} > \frac{1}{2}$, то

$$X \cap X_1 = \left[0; \frac{3-\sqrt{5}}{6}\right].$$

Ответ: $\left[0; \frac{3-\sqrt{5}}{6}\right]$.

Пример 8. Решим неравенство $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$.
Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3 > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3,\\ x \geqslant 1.\end{cases}$$

Решим неравенство $\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3 > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$. Имеем:

$$2 - x > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3,$$
$$1 - (x-1) > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3.$$

Пусть $\sqrt{x-1} = y$. Тогда $y^2 = x - 1$. Произведем замену:

$$1 - y^2 > (1-y)^3.$$

Далее имеем:

$$(1-y)(1+y) - (1-y)^3 > 0,$$
$$(1-y)(1+y-(1-2y+y^2)) > 0,$$
$$(1-y)(3y-y^2) > 0,$$
$$(y-1)y(y-3) > 0.$$

Отсюда $0 < y < 1$ или $y > 3$.
Проведем обратную замену:

$$0 < \sqrt{x-1} < 1 \text{ или } \sqrt{x-1} > 3;$$
$$1 < x < 2 \text{ или } x > 10.$$

Ответ: $(1; 2) \cup (10; +\infty)$.

Пример 9. Решим неравенство $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x+2} \geqslant \frac{|x|}{x}\sqrt[3]{4}$.

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x+2}$, а $g(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt[3]{4}$. Функция $f$ возрастает на множестве $\boldsymbol{R}$ (как сумма двух возрастающих функций), а функция $g$ имеет постоянное значение $-\sqrt[3]{4}$ при $x < 0$ и $\sqrt[3]{4}$ при $x > 0$. Если $x = -2$, то $f(x) + g(x) = -\sqrt[3]{4}$, если $x = 2$, то $f(x) + g(x) = \sqrt[3]{4}$.

Следовательно, если $-2 \leqslant x < 0$, то $f(x) \geqslant -\sqrt[3]{4}$, если $x \geqslant 2$, то $f(x) \geqslant \sqrt[3]{4}$. Значит, множество решений данного неравенства — объединение промежутков $[-2; 0)$ и $[2; +\infty)$.

Ответ: $[-2; 0) \cup [2; +\infty)$.

**934.** Решите неравенство:

а) $\sqrt{x} < 5$;
в) $\sqrt{x-5} < 2$;
б) $\sqrt[4]{x} \geqslant 2$;
г) $\sqrt[3]{x-8} > 3$.

**935.** Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2+8x-9} < \sqrt{11}$;
в) $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}} < 1$;
б) $\sqrt{2x^2-11x+18} > 2$;
г) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-7}} > 2$.

**936.** Докажите, что неравенство $\sqrt{x-7} < 2-x$ не имеет решений.

**937.** Решите неравенство:

а) $\sqrt{x-4} > 1-x$;
в) $\sqrt{x^2-7x+12} < x-3$;
б) $\sqrt{x-5} < 3-x$;
г) $\sqrt{x^2-6x-16} > x-5$.

**938.** Найдите промежутки, на которых функция

$$y = \sqrt{4x+1} - x + 1$$

принимает:

а) отрицательные значения; б) положительные значения.

**939.** Решите неравенство:

а) $\sqrt[4]{2x-5} < \sqrt[4]{x+7}$;
в) $\sqrt[6]{x-5} < \sqrt[3]{x+1}$;
б) $\sqrt[3]{x^2-1} > \sqrt[3]{x+3}$;
г) $\sqrt{x-2} < \sqrt[4]{x+5}$.

**940.** Найдите множество решений неравенства:

а) $x^{\frac{1}{2}} - 7x^{\frac{1}{4}} + 6 < 0$;
в) $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}-4}{x^{\frac{2}{3}}+2} - \dfrac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}-1} < 3$;
б) $x^{\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{1}{6}} + 6 > 0$;
г) $\dfrac{x^{\frac{6}{5}}-9}{x^{\frac{3}{5}}-3} - \dfrac{x^{\frac{4}{5}}-4}{x^{\frac{2}{5}}+21} > 5$.

**941.** Решите неравенство:

а) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} < \sqrt[8]{128}$;  б) $\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 9}} > \sqrt{x - 3}$.

**942.** Решите неравенство:

а) $\dfrac{\sqrt{x - 4} - 2}{8 - \sqrt{x - 4}} < 2$;  в) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > \dfrac{3}{5}(x - x^{-1})$;

б) $\dfrac{\sqrt{2x - 5} - 1}{\sqrt{2x - 5} + 1} > 3$;  г) $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} > \dfrac{3}{4}\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}\right)$.

**943.** Используя свойства монотонности функций, решите неравенство:

а) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{5x - 1} + \sqrt{3x + 10} \leqslant 9$;

б) $(x + 5)^{\frac{1}{3}} + (2x - 5)^{\frac{1}{2}} + (5x + 1)^{\frac{1}{4}} \leqslant 5$.

**944.** Решите неравенство:

а) $(x - 8)\sqrt{15 - 5x} < 0$;

б) $(x^2 - 9)\sqrt{16 - x^2} > 0$;

в) $(24 + 5x - x^2)\sqrt[4]{x^2 - 5x - 14} \geqslant 0$;

г) $(x^2 - 3x + 8)\sqrt[4]{x^2 - x - 56} \leqslant 0$.

**945.** Докажите, что множество решений неравенства

$$\sqrt{8 - 2x} - 5x \leqslant \sqrt{6x - 24} - 20$$

состоит из одного числа.

**946.** Найдите множество решений неравенства

$$\sqrt{25 - x^2} + x(x - 5) \leqslant \sqrt{2x^2 - 50} - 5(5 - x).$$

**947.** Решите неравенство:

а) $\dfrac{\sqrt{x + 5} - 1}{5 - \sqrt{x + 5}} \geqslant 0$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{1 - x} - 2}{\sqrt[3]{1 - x} + 3} \geqslant 0$;

в) $(x^2 - 2x - 1)^{0,5} \leqslant 14(x^2 - 2x - 1)^{-0,5} - 5$;

г) $(x^2 - 3x + 11)^{0,5} > 8(x^3 - 3x + 11)^{-0,5} - 2$.

**948.** Решите неравенство:

а) $x - \sqrt[3]{2x + 4} < 0$;  б) $64\sqrt{-x} - x^2 \leqslant 0$.

## Упражнения для повторения

**949.** Задайте формулой функцию, обратную данной:

а) $y = 3x - 5$, где $-3 \leqslant x \leqslant 2$;

б) $y = -\sqrt{x - 3}$.

**950.** Решите уравнение

$$|2x^2 + 5x - 3| = 2x - 1.$$

**951.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

**952.** Докажите, что уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 3x + \sqrt{x} = 0$$

имеет только один корень.

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Какое уравнение называют иррациональным? Объясните, как решается уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ при четном $n$ и при нечетном $n$.

**2.** Какое неравенство называют иррациональным? Как решаются неравенства $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ при четном $n$ и при нечетном $n$?

## Дополнительные упражнения к главе 5

### К параграфу 14

**953.** Задайте формулой функцию, обратную данной:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$;

б) $y = \sqrt{x - 2} + 1$;

в) $y = \dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$;

г) $y = \dfrac{x^5 - x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 1}$, где $x \geqslant 0$.

**954.** Функция $y = x^n$, где $n$ — натуральное число, обратима. Каким может быть значение $n$?

**955.** Постройте график функции, обратной данной:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, где $x \geqslant 0$; в) $y = -\sqrt{x}$;

б) $y = \sqrt{-x}$; г) $y = \sqrt{9 - x^2}$, где $x \leqslant 0$.

**956.** Известно, что точка $M$ принадлежит графику функции $f(x) = \dfrac{k}{x}$. Найдите координаты точки, принадлежащей графику функции $g$, обратной $f$, если:

а) $M(8;\ 2)$; в) $M(3;\ 3)$;

б) $M(-4;\ 1)$; г) $M(-1;\ -1)$.

**957.** Найдите $f(g(x))$, если:

а) $f(x) = x^2 - 4x$, где $x \leqslant 2$, и $g(x) = 2 - \sqrt{x + 4}$;

б) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, где $x \geqslant 3$, и $g(x) = \sqrt{x - 1} + 3$.

**958.** Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{1}{x - 2} + 3$. Найдите:

а) $D(f)$ и $E(f)$;

б) $D(g)$ и $E(g)$, где $g$ — функция, обратная $f$.

**959.** Найдите нули функции, обратной функции:

а) $y = -2 + \sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{1}{5}x - 3$.

**960.** Монотонная функция $y = f(x)$ пересекает ось $y$ в точке $A(0;\ -6)$. Найдите нули функции $g$, обратной функции $f$.

**961.** Задайте формулой функцию, обратную данной:

а) $y = (x - 1)^3$; б) $y = (x - 2)^4$, где $x \geqslant 2$.

**962.** Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x + 2}{x^2 - 4}}$; в) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x - 3}{|x| - 3}}$;

б) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x - 2}{x + 3}}$; г) $y = \sqrt[6]{x^3 - 5x^2 + 6x}$.

**963.** Найдите область значений функции:

а) $y = \sqrt[3]{x - 8}$, где $0 \leqslant x \leqslant 16$;

б) $y = \sqrt[3]{x - 4}$, где $4 \leqslant x \leqslant 85$.

**964.** Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[3]{|x + 2|}$; в) $y = \sqrt[3]{-|x|}$;

б) $y = \sqrt[4]{|x|}$; г) $y = \sqrt[4]{|x - 1|} - 1$.

**965.** Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{|x - 4|}$; б) $y = \sqrt[3]{|x - 4|}$, где $x \geqslant 0$.

**966.** Используя свойства монотонности функций, решите уравнение:

а) $\sqrt{x - 4} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x + 8} = 6$;

б) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{3x + 5} + \sqrt[4]{10x + 6} = 5$.

## К параграфу 15

**967.** Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

**968.** Подберите такие значения $a$ и $b$, чтобы равенство $\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ было верным.

**969.** Покажите, что верно равенство

$$\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2.$$

Найдите еще подобные равенства.

**970.** Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$;

б) $\sqrt[4]{21 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{5 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}} \cdot \sqrt[4]{5 - \sqrt{4 + \sqrt{5}}}$.

**971.** Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$; б) $\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}$.

**972.** Найдите значение корня

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}(\underbrace{11...1}_{3n} - \underbrace{33...3}_{n}\underbrace{00...0}_{n})} \quad (n \in N).$$

**973.** Внесите множитель под знак корня:

а) $ab\sqrt[4]{5}$, где $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;

б) $ab\sqrt[4]{3}$, где $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$;

в) $-ab\sqrt[6]{2}$, где $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$;

г) $-ab\sqrt[6]{2}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

**974.** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{-54a^4}$; б) $\sqrt[4]{48b^5}$, где $b \geqslant 0$; в) $\sqrt[6]{-a^7b^8}$.

**975.** Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt[6]{99+70\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{20-11\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{61-28\sqrt{3}}} = 1$.

**976.** Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}$; в) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

б) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; г) $\dfrac{x+3\sqrt{x^2y}+3\sqrt{xy^2}+y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+2\sqrt[3]{xy}}$.

**977.** Представьте в виде квадрата суммы:

а) $a+b+2\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+1$;

б) $\sqrt{a}+b+1+2\sqrt[4]{ab^2}-2\sqrt[4]{a}-2\sqrt{b}$.

**978.** Представьте в виде куба суммы:

а) $a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}$;

б) $x+3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2}+y$.

**979.** Сократите дробь

$$\frac{x+y+2\sqrt{xy}+2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+1}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+\sqrt{xy}}.$$

**980.** Докажите, что

$$\sqrt{a^2+2b^2-2ab\sqrt{2}} = \begin{cases} a-b\sqrt{2}, \text{ если } a \geqslant b\sqrt{2}, \\ b\sqrt{2}-a, \text{ если } a \leqslant b\sqrt{2}. \end{cases}$$

**981.** Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{0{,}5^{\frac{1}{2}}}{5\sqrt{50}}$; б) $\dfrac{25^{\frac{1}{3}}}{0{,}04^{\frac{1}{6}}}$; в) $\dfrac{2\sqrt{108}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{0,5}}$; г) $\dfrac{48^{0,25}}{243^{0,25}}$.

**982.** Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $\left((27a)^{\frac{1}{3}}+(8a)^{\frac{1}{3}}\right)-\left(3{,}5^{-1}(343a)^{\frac{1}{3}}-30\,(0{,}001a)^{\frac{1}{3}}\right)$;

б) $ab\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^2}}-ab\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}}+\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{ab^4}-\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{a^4b}$.

**983.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{(x^{-0,4}+y^{-0,4})^{-1}(xy^{-0,2}+x^{-0,2}y)}{x^{0,8}-x^{0,4}y^{0,4}+y^{0,8}}$;

б) $\dfrac{y+2+(y^2-4)^{0,5}}{y+2-(y^2-4)^{0,5}}+\dfrac{y+2-(y^2-4)^{0,5}}{y+2+(y^2-4)^{0,5}}$;

в) $\dfrac{((a+b)^{-0,5}+(a-b)^{-0,5})^{-1}+((a+b)^{-0,5}-(a-b)^{-0,5})^{-1}}{((a+b)^{-0,5}+(a-b)^{-0,5})^{-1}-((a+b)^{-0,5}-(a-b)^{-0,5})^{-1}}$.

**984.** Упростите выражение

$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}.$$

**985.** Известно, что $10^{0,3010}\approx 2$ и $10^{0,6990}\approx 5$. Представьте в виде степени с основанием 10 число:

а) 8; в) 0,4; д) 0,008.
б) 25; г) 0,04;

**986.** Найдите значение выражения:

а) $(b^6)^{\frac{1}{6}}$ при $b=-2$;

б) $(c^6)^{\frac{1}{8}}$ при $c=-3$;

в) $(x^{10})^{0,1}$ при $x=-7$ и $x=8$;

г) $2y(y^4)^{0,25}$ при $y=-2$ и $y=3$.

**987.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{a}{(ab)^{0,5}+b}+\dfrac{b}{(ab)^{0,5}-a}-\dfrac{a+b}{a^{0,5}b^{0,5}}$;

б) $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}}$.

**988.** Постройте график функции:

а) $y=-x^{\frac{1}{2}}$; в) $y=|x|^{\frac{1}{3}}$;

б) $y=(-x)^{\frac{1}{2}}$; г) $y=(x^2)^{\frac{3}{2}}$.

**989.** Найдите область определения функции $y=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ и постройте ее график.

**990.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} - \left(\dfrac{a + (ab^3)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} + (ab)^{\frac{1}{4}}} - (ab)^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}$;

б) $\dfrac{\left(\left(x^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)^2 + x + 3}{x^{\frac{1}{2}} + 3}$.

**991.** Вычислите $\left(\sqrt[6]{25 - 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}}\right) \cdot \sqrt[3]{1 - 2\sqrt{6}}$.

**992.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{a + 4\sqrt{a - 4}} + \sqrt{a - 4\sqrt{a - 4}}$, рассмотрев случаи, когда $4 \leqslant a < 8$ и когда $a \geqslant 8$;

б) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{-2}$, если $x = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $n > 1$.

**993.** Докажите, что верно равенство:

а) $\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3$;

б) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$;

в) $\left(\dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \dfrac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right)^2 = 2$.

## К параграфу 16

**994.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{2 - x\sqrt{3}} + \sqrt{2 + x\sqrt{3}} = 2$;

б) $\sqrt{1 + x^2} = 2\sqrt{x(1 - x)}$;

в) $1 - x^2 - (1 - x^4)^{\frac{1}{2}} = 0$;

г) $(3x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} = 2x - 1$.

**995.** Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt[4]{8{,}5 + x} + \sqrt[4]{8{,}5 - x} = 3$;

б) $\sqrt[4]{x - 2} + \sqrt[4]{3 - x} = 1$;

в) $(4y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + (4y^2 + 1)^{\frac{1}{4}} = 12$;

г) $(5y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + (5y^2 + 1)^{\frac{1}{4}} = 6$.

**996.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = 16, \\ \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 40; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 32, \\ 12\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 7\sqrt{xy}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}} - 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 1, \\ \sqrt{5x + y} + \sqrt{5x - y} = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt[4]{x + y} - \sqrt[4]{x - y} = 2, \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 8. \end{cases}$

**997.** Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x + 24} + \sqrt{x + 1} = 5;$

б) $\sqrt[7]{7x + 4} + \sqrt[5]{x - 3} = 3;$

в) $\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1} = \dfrac{|x|}{x}\sqrt[3]{2};$

г) $\sqrt[5]{x - 32} + \sqrt[5]{x + 32} = \dfrac{|2x|}{x}\sqrt[5]{2}.$

**998.** Решите уравнение ($n \in N$ и $n > 1$):

а) $\sqrt[n]{(x + 1)^2} + \sqrt[n]{(x - 1)^2} = 4\sqrt[n]{x^2 - 1};$

б) $\sqrt[n]{(1 + x)^2} - \sqrt[n]{(1 - x)^2} = \sqrt[n]{1 - x^2}.$

**999.** Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} - \dfrac{1}{1 + \sqrt{1 - x}} = \dfrac{1}{x};$

б) $\sqrt[3]{x - 5} + \sqrt[3]{x - 12} = 1{,}5\sqrt[6]{8(x - 5)(x - 12)};$

в) $\sqrt[4]{621 + x} + \sqrt[4]{77 + x} = 8;$

г) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2.$

**1000.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$

**1001.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56$; б) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} + \sqrt{x\sqrt[3]{x}} = 24$.

**1002.** Решите уравнение относительно $x$:

$$(a + x)^{\frac{2}{3}} + 4(a - x)^{\frac{2}{3}} = 5(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

**1003.** Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$;

б) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - 4\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - 4\sqrt{x}}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x - 4\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 4\sqrt{x}}} = \sqrt[4]{x}$.

**1004.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x - y)^{\frac{1}{3}} + (x - y)^{\frac{1}{2}} = 12, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

**1005.** Решите неравенство:

а) $\sqrt{(x + 2)(x - 5)} < 8 - x$; б) $\sqrt{(x + 3)(x - 8)} \geqslant x + 2$.

**1006.** Решите неравенство:

а) $\sqrt[7]{x - 1} + \sqrt[7]{x + 1} \leqslant \frac{|x|}{x}\sqrt[7]{2}$;

б) $\sqrt[5]{x - 3} + \sqrt[5]{x + 3} \geqslant \frac{|x|}{x}\sqrt[5]{6}$.

**1007.** Зная, что $n$ — натуральное число, большее 1, решите неравенство:

а) $\sqrt[n]{5 - x} < 1$; б) $\sqrt[n]{x - 20} > -1$.

**1008.** Решите неравенство

$$2x(x - 1) + 1 > \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

**1009.** Решите относительно $x$ неравенство:

а) $\sqrt{x - 2} < a$; б) $\sqrt{3x - 1} > a$.

**1010.** Решите относительно $x$ неравенство

$$2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0, \text{ где } a > 0.$$

**1011.** Найдите множество решений неравенства

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} < \frac{4}{\sqrt{x}} - 1.$$

ГЛАВА 6

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

## § 17. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### 43. Угол поворота

Проведем в координатной плоскости окружность с центром $O$ и радиусом $OA$ (рис. 108). Один конец радиуса $OA$ совпадает с началом координат, а другой — принадлежит лучу $Ox$. Такой радиус называют *начальным радиусом*.

Начальный радиус можно повернуть около точки $O$ на сколько угодно градусов как по часовой, так и против часовой стрелки. Повернем, например, его против часовой стрелки на 180°, потом еще на 180° и еще на 60°. В результате начальный радиус повернется на 420° и займет положение радиуса $OB$. Говорят, что *угол поворота* начального радиуса равен 420°. Угол поворота считается положительным, если начальный радиус вращается против часовой стрелки, и отрицательным, если вращение происходит по часовой стрелке. На рисунке 108 стрелками показаны углы поворота 420° и − 50° .

В отличие от углов, рассматриваемых в курсе геометрии, для которых градусная мера угла изменяется от 0° до 360°, градусная мера угла поворота изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. может выражаться любым числом градусов.

При повороте начального радиуса $OA$ (рис. 109) на 120° против часовой стрелки он перейдет в радиус $OB$. Можно указать еще

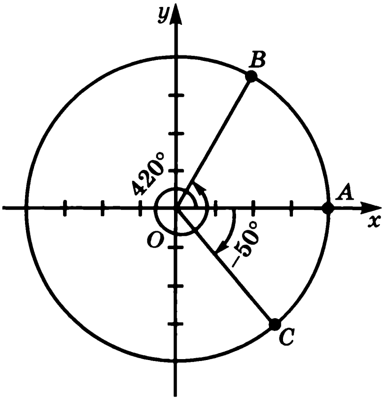



Рис. 108

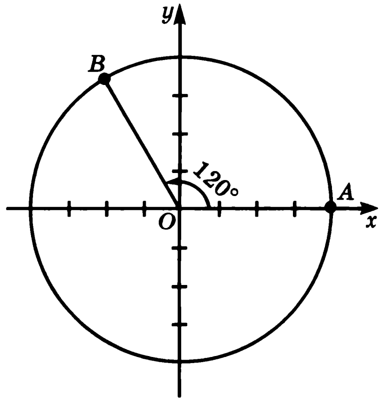



Рис. 109

сколько угодно углов поворота $\alpha$, при которых начальный радиус также перейдет в радиус $OB$. Например, $120° \pm 360°$, $120° \pm 2 \cdot 360°$, $120° \pm 3 \cdot 360°$, и т. д. Каждый из них вычисляется по формуле

$$\alpha = 120° \pm 360° n, \text{ где } n \text{ — целое число.}$$

Каким бы ни был угол поворота $\alpha$, его можно представить в виде суммы $\alpha_0 + 360°n$, где $0° \leqslant \alpha_0 < 360°$ и $n$ — целое число. При этом повороты на $\alpha_0$ и $\alpha$ переводят начальный радиус в один и тот же радиус, так как эти углы отличаются один от другого лишь на целое число оборотов.

Пример 1. Представим углы $5078°$ и $-1976°$ в виде $\alpha_0 + 360°n$, где $0° \leqslant \alpha_0 < 360°$ и $n$ — целое число.

Разделим с остатком каждое из чисел 5078 и 1976 на 360, получим:

$$5078 = 360 \cdot 14 + 38,\ 1976 = 360 \cdot 5 + 176.$$

Отсюда

$$5078° = 38° + 360° \cdot 14,$$
$$-1976° = -176° - 360° \cdot 5 = 184° + 360° \cdot (-6).$$

В равенстве $5078° = 38° + 360° \cdot 14$ имеем $\alpha_0 = 38°$ и $n = 14$, а в равенстве $-1976° = 184° + 360° \cdot (-6)$ имеем $\alpha_0 = 184$ и $n = -6$.

Оси координат разбивают множество не принадлежащих им точек координатной плоскости на четыре четверти (рис. 110). Если при повороте на угол $\alpha$ начальный радиус перейдет в радиус, лежащий в I четверти, то говорят, что $\alpha$ есть угол поворота I четверти. Таким же образом понимаются углы поворота II, III и IV четвертей.

Если угол $\alpha$ представить в виде $\alpha_0 + 360°n$, то по $\alpha_0$ легко узнать, к какой четверти относится угол $\alpha$.

Если $0° < \alpha_0 < 90°$, то $\alpha$ — угол I четверти; если $90° < \alpha_0 < 180°$, то $\alpha$ — угол II четверти; если $180° < \alpha_0 < 270°$, то $\alpha$ — угол III четверти; если $270° < \alpha_0 < 360°$, то $\alpha$ — угол IV четверти. Если $\alpha_0$ равен $0°$, $90°$, $180°$ или $270°$, то угол $\alpha$ не относится ни к какой четверти. Такой угол имеет вид $\alpha = 90°n$, где $n$ — целое число. При повороте начального радиуса на угол $90°n$ он переходит в радиус, лежащий на одной из осей координат.

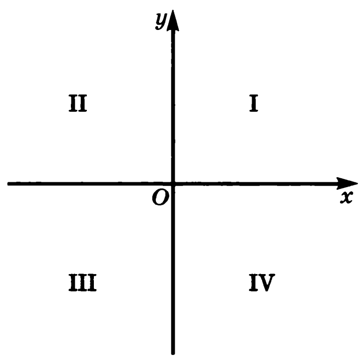


Рис. 110

Пример 2. Выясним, углом какой четверти является угол поворота $\alpha$, равный $995°$.

Представим угол $\alpha$ в виде $\alpha_0 + 360°n$, где $0° \leqslant \alpha_0 < 360°$ и $n$ — целое число, получим

$$\alpha = 995° = 275° + 360° \cdot 2.$$

В этом примере $\alpha_0 = 275°$. Так как $270° < 275° < 360°$, то $\alpha_0$, а следовательно, и $\alpha$ есть угол IV четверти.

**1012.** Начертите в координатной плоскости окружность с начальным радиусом $OA$, равным 4 см. Поверните начальный радиус на угол $\alpha$ и покажите стрелкой угол поворота, если:
а) $\alpha = 450°$; в) $\alpha = 135°$; д) $\alpha = -200°$;
б) $\alpha = -60°$; г) $\alpha = -120°$; е) $\alpha = 315°$.

**1013.** Покажите стрелкой угол поворота $\alpha$ начального радиуса, если $\alpha = 450°$; $-540°$; $720°$.

**1014.** При повороте на угол $\alpha$ начальный радиус $OA$ переходит в радиус $OB$. Как расположен радиус $OB$ в системе координат, если:
а) $\alpha = 90°$; г) $\alpha = -90°$; ж) $\alpha = 0°$;
б) $\alpha = 180°$; д) $\alpha = -180°$; з) $\alpha = 360°$;
в) $\alpha = 270°$; е) $\alpha = -270°$; и) $\alpha = -360°$?

**1015.** Углом какой четверти является угол поворота:
а) $190°$; в) $300°$; д) $35°$; ж) $100°$;
б) $-85°$; г) $-100°$; е) $-185°$; з) $-350°$?

**1016.** Представьте угол поворота $\alpha$ в виде $\alpha_0 + 360°n$, где $0° < \alpha_0 < 360°$ и $n$ — целое число, если:
а) $\alpha = 1100°$; в) $\alpha = 2150°$; д) $\alpha = 4322°$;
б) $\alpha = -672°$; г) $\alpha = -3400°$; е) $\alpha = -3960°$.

**1017.** Углом какой четверти является угол поворота $\alpha$, если:
а) $\alpha = 850°$; в) $\alpha = 369°$; д) $\alpha = 920°$;
б) $\alpha = -460°$; г) $\alpha = -1000°$; е) $\alpha = -2170°$?

**1018.** Пусть при повороте начального радиуса $OA$ на угол $\alpha$ он переходит в радиус $OB$. Назовите еще два положительных и два отрицательных угла поворота, переводящих радиус $OA$ в радиус $OB$, если:
а) $\alpha = 359°$; б) $\alpha = -412°$.

**1019.** Начальный радиус $OA$ сначала повернули на $115°$, а потом еще на $-75°$. В результате он перешел в радиус $OB$. Напишите формулу, по которой можно вычислить любой угол поворота $\alpha$, при котором радиус $OA$ переходит в радиус $OB$.

### Упражнения для повторения

**1020.** Докажите, что функция $y = n^2 - 2n + 1$, где $n$ — натуральное число, обратима. Постройте ее график и график обратной ей функции. Задайте обратную функцию формулой.

**1021.** Упростите выражение

$$\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right) : \frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

**1022.** Сколько общих точек имеют:
а) прямая $x + 2y = 5$ и окружность $x^2 + y^2 = 5$;
б) окружность $x^2 + y^2 = 10$ и прямая $x - 3y = 9$;
в) прямая $x - y = 6$ и парабола $y = x^2 + 10$;
г) парабола $x = y^2 - 5$ и окружность $x^2 + y^2 = 100$?

## 44. Измерение углов поворота в радианах

При измерении углов поворота, так же как и при измерении величины угла, кроме градусов используют минуты и секунды. Напомним, что $1° = 60'$; $1' = 60''$.

Однако во многих случаях более удобной единицей величины угла оказывается *радиан* (от лат. *radius* — радиус).

Пусть при повороте начального радиуса $OA$ (рис. 111) против часовой стрелки его подвижный конец опишет дугу, равную по длине радиусу, и займет положение $B$. Угол поворота, при котором $OA$ переходит в $OB$, называют радианом. Заметим, что с помощью радиана измеряют любую величину угла.

Определение. **Радианом называется угол поворота начального радиуса против часовой стрелки, при котором его подвижный конец описывает дугу, равную по длине радиусу.**

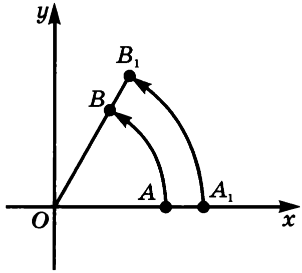


**Рис. 111**

На рисунке 111 стрелкой показан угол поворота $\alpha$ в 1 радиан:

$$\alpha = 1 \text{ рад}.$$

Единица величины угла радиан не зависит от длины начального радиуса.

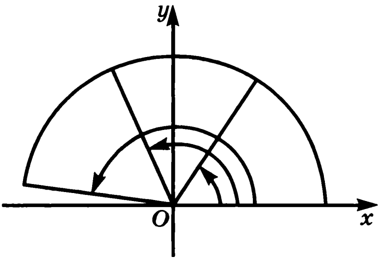



Рис. 112

Возьмем произвольный начальный радиус $OA_1$ (см. рис. 111) и повернем его на тот же угол $\alpha$. Его свободный конец опишет дугу $A_1B_1$. Длина этой дуги пропорциональна длине радиуса $OA_1$. Отсюда следует, что длина дуги $A_1B_1$ также равна длине радиуса $OA_1$.

На рисунке 112 стрелками показаны углы поворота в 1, 2, 3 радиана. При этом свободный конец начального радиуса описывает дугу длиной $R$, $2R$ и $3R$, где $R$ — длина радиуса.

Если длину дуги, которую описывает свободный конец начального радиуса при вращении против часовой стрелки, разделить на длину радиуса $R$, то получится угол поворота в радианах.

При повороте начального радиуса на 180° его свободный конец опишет полуокружность, длина которой равна $\pi R$. Чтобы выразить угол поворота в радианах, надо $\pi R$ разделить на $R$. Получится

$$180^\circ = \frac{\pi R}{R} \text{ рад} = \pi \text{ рад} = 3{,}1428\ldots \text{ рад}.$$

Рассмотрим равенство

$$180^\circ = \pi \text{ рад}. \qquad (1)$$

Разделив обе его части на 180, получим:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад};$$

$$1^\circ \approx 0{,}017 \text{ рад}.$$

Переставим в равенстве (1) правую и левую части и разделим каждую из них на $\pi$. Получим:

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi};$$

$$1 \text{ рад} \approx 57^\circ.$$

Пример 1. Выразим в радианах 135°.

Так как $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад, то

$$135^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 135 \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад} \approx 2{,}4 \text{ рад}.$$

Пример 2. Выразим в градусах 0,3 рад.

Так как 1 рад $= \frac{180°}{\pi}$, то

$$0{,}3 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi} \cdot 0{,}3 = \frac{54°}{\pi} \approx 17°.$$

Обозначение радиана при записи угла поворота часто опускают. Так, например, вместо $135° = \frac{3\pi}{4}$ рад $\approx 2{,}4$ рад можно писать $135° = \frac{3\pi}{4} \approx 2{,}4$.

Во многих случаях, выражая угол поворота в радианах, сохраняют множитель $\pi$, а не заменяют его десятичной дробью. Например,

$$30° = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}; \qquad 90° = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2};$$

$$45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}; \qquad 270° = \frac{\pi}{180} \cdot 270 = \frac{3\pi}{2};$$

$$60° = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}; \qquad 360° = \frac{\pi}{180} \cdot 360 = 2\pi.$$

Формула $\alpha = \alpha_0 + 360°n$ при измерении углов в радианах принимает вид

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi n,$$

где $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$ и $n$ — целое число.

**1023.** Выразите в радианах:

а) 10°; в) −115°; д) 250°; ж) 350°;
б) 85°; г) 200°; е) −216°; з) 400°.

**1024.** Запишите с помощью $\pi$ в радианах угол:

а) 120°; в) −210°; д) −300°; ж) 540°;
б) 150°; г) 240°; е) 330°; з) −720°.

**1025.** Выразите в градусах угол поворота:

а) 0,4 рад; в) 2,6 рад; д) −4,2 рад;
б) 1,3 рад; г) −3,5 рад; е) 10 рад.

**1026.** Запишите в градусах угол:

а) $\frac{2}{3}\pi$; в) $\frac{7}{6}\pi$; д) $\frac{5}{3}\pi$; ж) $\frac{13}{6}\pi$;
б) $\frac{5}{6}\pi$; г) $\frac{4}{3}\pi$; е) $\frac{11}{6}\pi$; з) $3\pi$.

**1027.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $\frac{4}{9}\pi$, а угол $B$ в 3 раза больше угла $C$. Найдите углы $B$ и $C$.

**1028.** Один из углов равнобокой трапеции равен $0{,}7\pi$. Найдите остальные углы этой трапеции.

**1029.** Углом какой четверти является угол $\alpha$, если:

а) $\alpha = \frac{3}{5}\pi$; в) $\alpha = \frac{6}{5}\pi$; д) $\alpha = 1{,}75\pi$;

б) $\alpha = \frac{4}{9}\pi$; г) $\alpha = 1{,}4\pi$; е) $\alpha = \frac{9}{5}\pi$?

**1030.** Представьте угол поворота $\alpha$ в виде $\alpha_0 + 2\pi n$, где $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$ и $n$ — целое число, если:

а) $\alpha = 3\pi$; в) $\alpha = 4{,}8\pi$; д) $\alpha = \frac{10}{3}\pi$;

б) $\alpha = -2{,}3\pi$; г) $\alpha = -5{,}5\pi$; е) $\alpha = -\frac{11}{4}\pi$?

**1031.** Углом какой четверти является угол поворота $\alpha$, если:

а) $\alpha = 2{,}9\pi$; в) $\alpha = 4{,}3\pi$; д) $\alpha = \frac{14}{3}\pi$;

б) $\alpha = -3{,}1\pi$; г) $\alpha = -4{,}9\pi$; е) $\alpha = -\frac{7}{3}\pi$?

**1032.** Напишите формулу для вычисления угла $\alpha$, если при повороте начального радиуса на этот угол он переходит в радиус, расположенный:

а) на луче $Oy$;
б) на луче, противоположном лучу $Oy$;
в) на луче $Ox$;
г) на луче, противоположном лучу $Ox$;
д) на оси $y$;
е) на оси $x$.

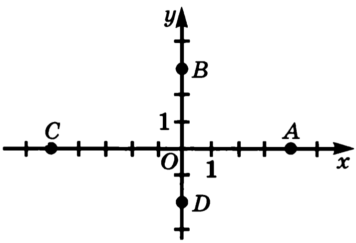


Рис. 113

**1033.** Координатная плоскость (рис. 113) поворачивается около точки $O$ на угол $\alpha$. В какие точки перейдут при этом точки $A(4;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $C(-5;\ 0)$ и $D(0;\ -2)$, если:

а) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; в) $\alpha = \pi$;

б) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; г) $\alpha = -\pi$?

**1034.** В координатной плоскости отмечены точки $M(2;\ 4)$, $N(-2;\ 3)$, $P(-2;\ -4)$ и $K(5;\ -3)$. В какие точки они перейдут при повороте координатной плоскости на угол $\alpha$ около точки $O$, если:

а) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; б) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; в) $\alpha = \pi$; г) $\alpha = -\pi$?

### Упражнения для повторения

**1035.** Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{x^2 - 7x - 30}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{6x^2 - 5x - 6}}$.

**1036.** Функции $u$, $v$ и $w$ определены на множестве $\boldsymbol{R}$. Причем $u$ обратна $v$ и $v$ обратна $w$. Является ли функция $u$ обратной функции $w$?

**1037.** Покажите штриховкой в координатной плоскости решения системы $\begin{cases}(x-3)^2 + y^2 \leqslant 16,\\ x^2 - 3 \geqslant y.\end{cases}$

## 45. Определение тригометрических функций

При повороте около точки $O$ на угол $\alpha$ (рис. 114) начальный радиус $OA$ перейдет в радиус $OB$, называемый *конечным радиусом*. Пусть координаты точки $B$ равны $x$ и $y$, а длина радиуса равна $R$.

Отношения $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$ не зависят от длины радиуса. В самом деле, возьмем два начальных радиуса: $OA_1 = R_1$ и $OA_2 = R_2$. Повернем их около точки $O$ на один и тот же угол $\alpha$ (рис. 115). Получим радиусы $OB_1$ и $OB_2$. Пусть координаты точки $B_1$ равны $x_1$ и $y_1$, а координаты точки $B_2$ равны $x_2$ и $y_2$. Какой бы четверти ни принадлежал угол $\alpha$, можно построить прямоугольные треугольники $OB_1C_1$ и $OB_2C_2$ ($B_1C_1 \perp OA_1$, $B_2C_2 \perp OA_2$). Из подобия этих треугольников с учетом знаков координат точек $B_1$ и $B_2$ следуют равенства

$$\frac{y_1}{R_1} = \frac{y_2}{R_2} \text{ и } \frac{x_1}{R_1} = \frac{x_2}{R_2}.$$

Эти равенства верны и тогда, когда точки $B_1$ и $B_2$ попадают на какую-либо из осей координат.

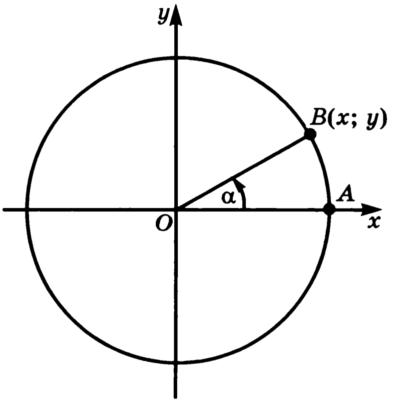



Рис. 114

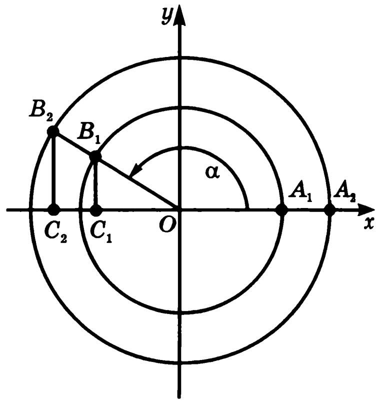



Рис. 115

Значит, каждому углу поворота α (см. рис. 114) соответствует единственное значение отношения $\frac{y}{R}$, а также единственное значение отношения $\frac{x}{R}$. Поэтому эти отношения являются функциями угла поворота α. Первое из них называют *синусом*, а второе — *косинусом*. Пишут

$$\sin\alpha = \frac{y}{R},\ \cos\alpha = \frac{x}{R}.$$

Пусть при повороте начального радиуса $OA$ точка $A$ перешла в точку $B(x;\ y)$.

**Синусом угла поворота называется отношение ординаты точки *B* к длине радиуса.**

**Косинусом угла поворота называется отношение абсциссы точки *B* к длине радиуса.**

Аргументом синуса и косинуса является угол поворота α. Если этот угол выражается в радианах, то значениями α являются действительные числа. В таких случаях синус и косинус рассматривают как функции числового аргумента. Например, $\sin 0{,}8$ означает синус угла поворота в 0,8 радиана, $\cos\frac{\pi}{2}$ есть косинус угла поворота в $\frac{\pi}{2}$, равного 1,57... радиана.

Областью определения как синуса, так и косинуса является промежуток $(-\infty;\ +\infty)$. При изменении угла поворота координаты

$x$ и $y$ изменяются в пределах от $-R$ до $R$. Поэтому отношения $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$ изменяются в пределах от $-1$ до 1. Значит, областью значений синуса и косинуса является промежуток $[-1; 1]$.

Рассмотрим еще два отношения: $\frac{y}{x}$ и $\frac{x}{y}$ (см. рис. 114). Они также зависят лишь от угла поворота и не зависят от длины радиуса. Каждому значению $\alpha$, если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число, соответствует единственное значение отношения $\frac{y}{x}$, и каждому значению $\alpha$, если $\alpha \neq \pi n$, где $n$ — целое число, соответствует единственное значение отношения $\frac{x}{y}$. Следовательно, отношения $\frac{y}{x}$ и $\frac{x}{y}$ являются функциями угла поворота. Их называют соответственно *тангенсом* и *котангенсом*. Пишут

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

**Тангенсом угла поворота называется отношение ординаты точки $B$ к ее абсциссе.**

**Котангенсом угла поворота называется отношение абсциссы точки $B$ к ее ординате.**

Тангенс и котангенс также часто рассматривают как функции числового аргумента. Областью определения тангенса является множество всех действительных чисел, из которого исключаются числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число. Для котангенса из того же множества исключаются числа вида $\pi n$, где $n$ — целое число.

Областью значений тангенса и котангенса является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Для углов $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ функции синус, косинус и тангенс совпадают с рассмотренными в курсе геометрии функциями, имеющими те же названия.

Рассмотрим примеры вычисления приближенных значений тригонометрических функций.

Пример 1. Найдем, используя рисунок 116, значения тригонометрических функций угла 65°.

Повернем начальный радиус $OA$ на угол 65°. Найдем координаты лежащего на окружности конца конечного радиуса $OB$. Получим

$$x \approx 1{,}3; \; y \approx 2{,}7.$$

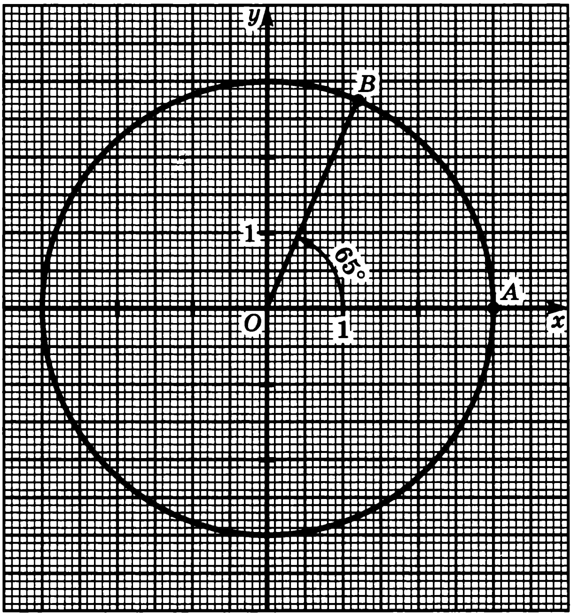



Рис. 116

Применив определения тригонометрических функций, будем иметь:

$$\sin 65° = \frac{y}{R} \approx \frac{2{,}7}{3} = 0{,}9; \qquad \operatorname{tg} 65° = \frac{y}{x} \approx \frac{2{,}7}{1{,}3} \approx 2{,}1;$$

$$\cos 65° = \frac{x}{R} \approx \frac{1{,}3}{3} \approx 0{,}4; \qquad \operatorname{ctg} 65° = \frac{x}{y} \approx \frac{1{,}3}{2{,}7} \approx 0{,}5.$$

Значения тригонометрических функций можно находить с помощью калькулятора.

Пример 2. Найдем с помощью калькулятора приближенные значения $\sin 137°29'$, $\cos(-0{,}816)$, $\operatorname{tg} 5{,}38$ и $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$ с точностью до тысячных.

Найдя с помощью калькулятора приближенные значения выражений и округлив их до тысячных, получим:

$$\sin 137°29' \approx 0{,}676; \ \cos(-0{,}816) \approx 0{,}685;$$

$$\operatorname{tg} 5{,}38 \approx -1{,}268; \ \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} \approx -3{,}436.$$

Для некоторых углов поворота, используя простейшие геометрические сведения, можно найти точные значения тригонометрических функций.

Пример 3. Найдем значения синуса, косинуса и тангенса 180°.

При повороте на 180° начальный радиус $OA = R$ (рис. 117) перейдет в радиус $OM$. Точка $M$ окажется на луче, противоположном лучу $Ox$. Ее координаты: $x = -R$ и $y = 0$.

Поэтому

$$\sin 180° = \frac{0}{R} = 0;$$

$$\cos 180° = \frac{-R}{R} = -1;$$

$$\operatorname{tg} 180° = \frac{0}{-R} = 0.$$

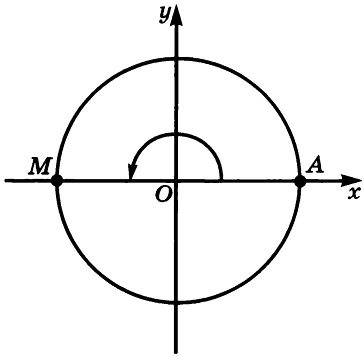


Рис. 117

Заметим, что ctg 180° не имеет смысла, так как не имеет смысла отношение $\frac{-R}{0}$.

Составим таблицу значений тригонометрических функций для некоторых углов. Многие из этих значений были вычислены в курсе геометрии. Прочерк в таблице сделан тогда, когда выражение не имеет смысла.

| $\alpha$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | — | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

Заметим следующее: если взять последовательность дробей

$$\frac{0}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}$$

и из каждой дроби извлечь квадратный корень, то получится строка из таблицы для значений $\sin\alpha$: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1.

Пример 4. Найдем значение выражения $\cos^2 45°$.

Выражение $\cos^2 45°$ означает $(\cos 45°)^2$. Его читают: «Косинус квадрат 45°». Значит,

$$\cos^2 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

**1038.** На рисунке 118 изображены углы поворота 125°, 220° и −20°. Найдите приближенные значения тригонометрических функций каждого из этих углов.

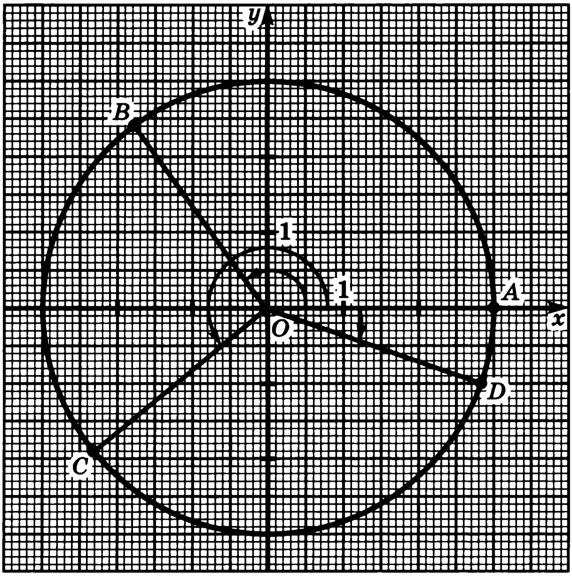



Рис. 118

**1039.** Используя рисунок 119, найдите приближенные значения тригонометрических функций углов 1,4; 2,7; 5,2 и −2,5 радиана.

**1040.** При повороте начального радиуса $OA$ на угол $\alpha$ точка $A$ с координатами $R$ и 0 переходит в точку $B$ с координатами $x$ и $y$. Вычислите значения тригонометрических функций угла $\alpha$, если:

а) $x = 0{,}3$; $y = 0{,}4$;
б) $x = -12$; $y = -9$;
в) $x = 1{,}8$; $y = -2{,}4$;
г) $x = 0{,}3$; $y = 2{,}7$;
д) $x = 3$; $y > 0$; $R = 4$;
е) $x < 0$; $y = 2$; $R = 3$;
ж) $x = -5$; $y < 0$; $R = 6$;
з) $x > 0$; $y = -1$; $R = 2$.

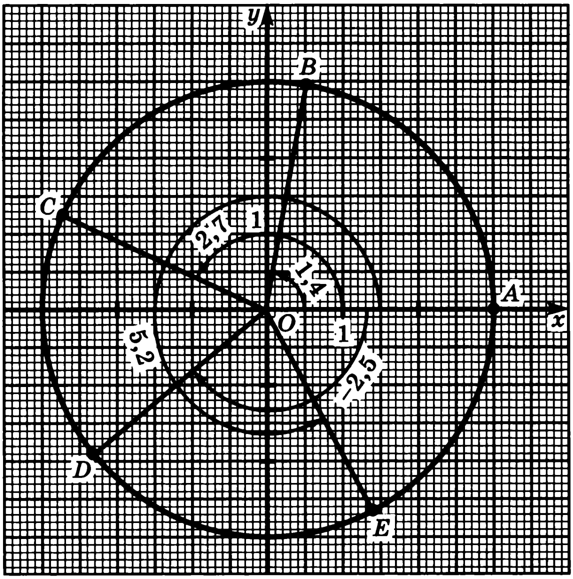



Рис. 119

**1041.** С помощью калькулятора найдите приближенное значение с четырьмя знаками после запятой следующих функций:

а) $\sin 211°37'$; д) $\sin 0{,}513$; и) $\sin(-2{,}555)$;
б) $\cos 302°18'$; е) $\cos(-1{,}618)$; к) $\cos 3{,}408$;
в) $\operatorname{tg} 196°45'$; ж) $\operatorname{tg}(-4{,}009)$; л) $\operatorname{tg} 1{,}985$;
г) $\operatorname{ctg} 256°10'$; з) $\operatorname{ctg} 1{,}313$; м) $\operatorname{ctg}(-4{,}123)$.

**1042.** Используя свойства прямоугольного треугольника, вычислите значение каждой тригонометрической функции угла $\alpha$, если:

а) $\alpha = 135°$; в) $\alpha = 240°$; д) $\alpha = -30°$;
б) $\alpha = 210°$; г) $\alpha = 300°$; е) $\alpha = -45°$.

**1043.** Найдите значение каждой из тригонометрических функций угла $\alpha$, если:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; в) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; д) $\alpha = \frac{3}{2}\pi$;

б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; г) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$; е) $\alpha = -1\frac{3}{4}\pi$.

**1044.** Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3}\cos 30° + \sqrt{2}\sin 45°$; д) $4\cos 30° \sin 60°$;

б) $\sqrt{3}(\sin 60° - \operatorname{tg} 30°)$; е) $2\operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 30°$;

в) $2\cos 60° + 3\operatorname{tg} 45°$; ж) $4\operatorname{ctg} 30° \sin 60°$;

г) $\sqrt{3}\cos 0° - 2\operatorname{ctg} 30°$; з) $2\cos 30° \operatorname{ctg} 60°$.

**1045.** Чему равно значение выражения:

а) $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$; д) $\sin\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$; е) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $4\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$; ж) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

г) $8\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; з) $\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$?

**1046.** Найдите значение выражения:

а) $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$, если $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

в) $\sin 2\alpha\cos 3\alpha$, если $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

г) $\operatorname{ctg}2\alpha\sin 3\alpha$, если $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

**1047.** Чему равно значение выражения:

а) $\dfrac{(\sin(-30^\circ)-\cos 30^\circ)^2}{3\cos(-45^\circ)\sin 45^\circ-6\operatorname{tg}30^\circ\operatorname{ctg}60^\circ}$;

б) $\dfrac{2\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}}$?

**1048.** Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{(\cos 60^\circ-\sin 60^\circ)^2}}{\sin 30^\circ(1-\operatorname{tg}60^\circ)}$; б) $\dfrac{\sqrt{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^2}}{\sqrt{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)^2}}$.

**1049.** Верно ли, что последовательность

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}},\ \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}},\ \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}}$$

является арифметической прогрессией?

**1050.** Найдите три значения $\alpha$, при которых:

а) $\sin\alpha=0$; г) $\operatorname{tg}\alpha=1$; ж) $\sin\alpha=-1$;
б) $\cos\alpha=0$; д) $\cos\alpha=-1$; з) $\operatorname{tg}\alpha=-1$.
в) $\sin\alpha=1$; е) $\operatorname{ctg}\alpha=-1$;

**1051.** Известно, что $\cos x = \frac{1}{2}$. Верно ли, что $x = \frac{\pi}{3}$?

**1052.** Найдите значение выражения:

а) $2 \operatorname{tg} 30° \operatorname{ctg} 30° \cos 30° \sin 30° + \sqrt{3} \operatorname{tg} 60°$;

б) $\dfrac{\cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}} - \dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}}$.

**1053.** Чему равно значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{3}{4} + 2\cos^2 30°} + \sqrt{\frac{5}{4} - 3\operatorname{tg}^2 30°}$;

б) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} - 2\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sin^2 \frac{\pi}{4} + 2}$?

**1054.** Может ли при каком-нибудь значении $x$ быть верным равенство:

а) $\sin x = -\frac{1}{3}\pi$;

б) $\cos x = 3 - \sqrt{3}$;

в) $\sin x = 1 - \sqrt{2}$;

г) $\cos x = \sqrt{2} - 1$?

**1055.** Возможно ли, чтобы при каком-нибудь значении $a$ было верным равенство:

а) $\sin \frac{\pi}{4} = a^2 + 1$;

б) $\cos \frac{6\pi}{5} = a^2 - 1$;

в) $\sin \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}$;

г) $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{(a-1)(a+1)}$?

## Упражнения для повторения

**1056.** Постройте график функции $y = -\left|\sqrt[3]{x}\right|$. Является ли эта функция обратимой? Каково множество ее значений?

**1057.** При повороте начального радиуса $OA$ около точки $O$ на угол $\alpha$ точка $A$ переходит в точку $B$ с координатами $x$ и $y$. Углом какой четверти является угол $\alpha$, если:

а) $x > 0$ и $y < 0$;

б) $x < 0$ и $y > 0$;

в) $x > 0$ и $y > 0$;

г) $x < 0$ и $y < 0$?

**1058.** Как построить график функции $y = -2f(x + 1) - 4$, если построен график функции $y = f(x)$?

**1059.** Фермер и его сын выполнили некоторую работу за 6 ч. За сколько часов каждый из них мог бы выполнить эту работу, если бы сын затратил на нее на 5 ч больше, чем отец?

### Контрольные вопросы и задания

**1.** Как узнать, углом какой четверти является угол поворота? Приведите пример. Какие углы не относятся ни к какой четверти?

**2.** Сформулируйте определение радиана. Как выразить в радианах угол поворота, представленный в градусах? Приведите пример. Как выразить в градусах угол поворота, представленный в радианах? Приведите пример.

**3.** Сформулируйте определение синуса и косинуса угла поворота.

**4.** Сформулируйте определение тангенса и котангенса угла поворота.

**5.** Назовите область определения и область значений каждой тригонометрической функции.

## § 18. СВОЙСТВА И ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

### 46. Некоторые тригонометрические тождества

Повороты начального радиуса на углы $\alpha$ и $\alpha + 2\pi n$ при целом значении $n$ переводят начальный радиус в один и тот же радиус. Поэтому, каким бы ни был угол $\alpha$, при целом значении $n$ верны равенства:

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha; \qquad \operatorname{tg}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{tg}\alpha; \\ &\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha; \qquad \operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Так как всякий угол поворота можно представить в виде $\alpha + 2\pi n$, где $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ и $n$ — целое число, то тождества (1) дают возможность свести вычисление значения любой тригонометрической функции какого угодно угла к вычислению ее значения для некоторого угла из промежутка $[0; 2\pi)$.

Например,

$$\sin 1485° = \sin(45° + 360° \cdot 4) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-690°) = \operatorname{tg}(30° + 360° \cdot (-2)) = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos\left(-5\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 6\pi\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Повороты начального радиуса на углы $\alpha$ и $\alpha + \pi n$ при четном $n$ переводят его в один и тот же радиус. В этом случае

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$$
$$\text{и } \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n).$$

Если же $n$ нечетно, то повороты на углы $\alpha$ и $\alpha + \pi n$ переводят начальный радиус в радиусы, симметричные относительно начала координат (рис. 120). Если при этом координаты конца, лежащего на окружности, одного из этих радиусов — $x$ и $y$, то координаты другого конца радиуса $-x$ и $-y$. И в этом случае

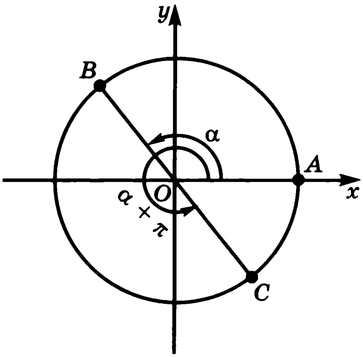



Рис. 120

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$$
$$\text{и } \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n),$$

так как $\frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$ и $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$.

Значит, при любом целом значении $n$ для углов поворота $\alpha$ и $\alpha + \pi n$ из области определения тангенса и котангенса имеют место равенства

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha. \tag{2}$$

Всякий угол поворота можно представить в виде $\alpha + \pi n$, где $0 \leqslant \alpha < \pi$ и $n$ — целое число. Это дает возможность свести вычисление значений тангенса и котангенса какого угодно угла к вычислению значений тех же функций для некоторого угла из промежутка $(0; \pi)$. Например,

$$\operatorname{tg} 585° = \operatorname{tg}(45° + 180° \cdot 3) = \operatorname{tg} 45° = 1;$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - \pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Рассмотрим связь между тригонометрическими функциями противоположных углов. Пусть при повороте начального радиуса

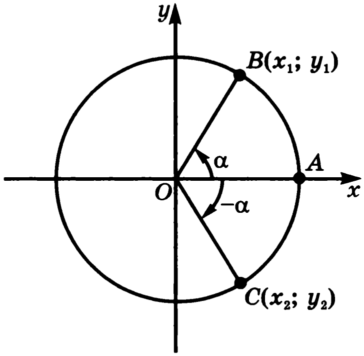



Рис. 121

$OA = R$ на угол $\alpha$ (рис. 121) около точки $O$ радиус $OA$ перейдет в радиус $OB$, а при повороте на угол $-\alpha$ — в радиус $OC$.

При симметрии относительно оси $x$ точка $C(x_2; y_2)$ перейдет в точку $B(x_1; y_1)$, так как

$$\angle COA = \angle BOA \text{ и } OC = OB.$$

Ось $y$ перейдет в ось, противоположную оси $y$. Поэтому ордината точки $C$ будет противоположна ординате точки $B$. Ось $x$ перейдет сама в себя. Поэтому абсцисса точки $C$ будет равна абсциссе точки $B$.

Отсюда

$$y_2 = -y_1, \qquad x_2 = x_1;$$

$$\frac{y_2}{R} = -\frac{y_1}{R}, \qquad \frac{x_2}{R} = \frac{x_1}{R};$$

$$\frac{y_2}{x_2} = -\frac{y_1}{x_1}, \qquad \frac{x_2}{y_2} = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} &\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha; \\ &\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned} \qquad (3)$$

Тождества (3) позволяют упростить вычисление значений тригонометрических функций для отрицательных углов.

Например,

$$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**1060.** Найдите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

а) $\alpha = 420^\circ$; в) $\alpha = -660^\circ$; д) $\alpha = 2\frac{1}{4}\pi$;

б) $\alpha = 2130^\circ$; г) $\alpha = -1035^\circ$; е) $\alpha = -3\frac{5}{6}\pi$.

**1061.** Чему равно значение:

а) $\operatorname{tg} 210^\circ$; в) $\operatorname{tg} 240^\circ$; д) $\operatorname{tg} 3\frac{2}{3}\pi$;

б) $\operatorname{ctg} 225^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 150^\circ$; е) $\operatorname{ctg} 1\frac{1}{4}\pi$?

**1062.** Найдите значение выражения:

а) $\cos(-45°)$; г) $\operatorname{ctg}(-30°)$; ж) $-\sin(-45°)$;
б) $\sin(-90°)$; д) $\sin(-60°)$; з) $-\cos(60°)$;
в) $\operatorname{tg}(-60°)$; е) $\cos(-30°)$; и) $-\operatorname{tg}(-45°)$.

**1063.** Найдите значение выражения:

а) $\sin(-30°) + \cos(-60°)$; в) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\operatorname{tg}(-45°) - \operatorname{ctg}(-45°)$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

**1064.** Найдите значение выражения:

а) $\sin(-405°) + \cos 750°$; в) $\sin 2{,}5\pi + \operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$;

б) $\cos(-780°) - \operatorname{tg}(-225°)$; г) $\operatorname{tg}\left(-1\frac{1}{6}\pi\right) - \operatorname{ctg} 3\frac{1}{3}\pi$.

**1065.** Упростите выражение:

а) $\sin(a - b) + \cos(a - b) - \sin(b - a) + \cos(b - a)$;
б) $\operatorname{tg}(x - y) + \operatorname{ctg}(x - y) + \operatorname{tg}(y - x) + \operatorname{ctg}(y - x)$;
в) $\sin(2\pi - x + y) - \sin(2\pi + x - y)$;
г) $\operatorname{tg}(x - y + 3\pi) - \operatorname{tg}(y - x - 3\pi)$.

## Упражнения для повторения

**1066.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt[4]{(x - 4)^4}$, где $x \leqslant 2$;

б) $\sqrt{-x^2 + 2x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2xy + 2y^2}$, где $y \leqslant x \leqslant 2$.

**1067.** В двух арифметических прогрессиях — $(a_n)$ и $(b_n)$ — первые члены равны $a$. Разность одной равна $-d$, а другой — $d$. Суммы $n$ первых членов этих прогрессий $S_n$ и $S'_n$. Докажите, что

$$\frac{S_n + S'_n}{S_n - S'_n} = \frac{a_n}{d(n-1)}.$$

**1068.** Координатная плоскость поворачивается около точки $O$ на угол $\alpha$. В какие точки перейдут точки $A(5; 1)$, $B(-4; 2)$, $C(-3; -4)$ и $D(1; -5)$, если:

а) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; в) $\alpha = \frac{3}{2}\pi$; д) $\alpha = \pi$;

б) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; г) $\alpha = -\frac{3}{2}\pi$; е) $\alpha = -\pi$?

## 47. Свойства тригонометрических функций

Рассмотрим вопрос о нулях тригонометрических функций и промежутках, в которых функция принимает положительные и отрицательные значения.

Так как $\sin\alpha = \frac{y}{R}$ (см. рис. 114), то $\sin\alpha$ равен нулю, когда $y = 0$. В этих случаях конечный радиус оказывается на оси $x$. При этом угол поворота равен $0$, $\pm\pi$, $\pm2\pi$, $\pm3\pi$, ... (рис. 122).

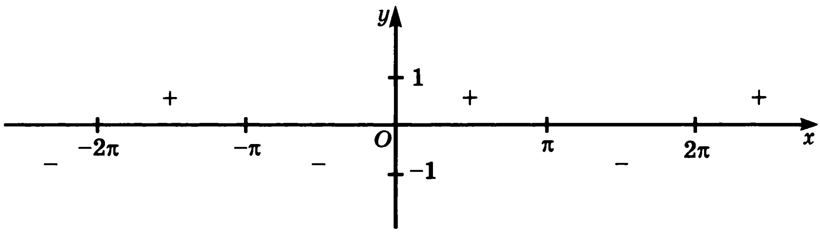



Рис. 122

Значит, нулем синуса является всякий угол вида $\pi n$, где $n$ — целое число. Иных нулей синус не имеет.

Так как $\cos\alpha = \frac{x}{R}$, то $\cos\alpha = 0$, если $x = 0$. Это происходит тогда, когда конечный радиус попадает на ось $y$. Что возможно лишь для углов $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \pm \pi$, $\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{2} \pm 3\pi$, ... (рис. 123).

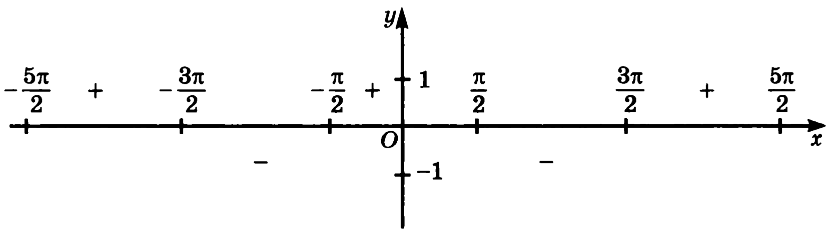



Рис. 123

Значит, нулем косинуса является всякий угол вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число. Других нулей косинус не имеет.

Из определений тангенса и котангенса следует, что нули тангенса совпадают с нулями синуса (рис. 124), а нули котангенса совпадают с нулями косинуса (рис. 125).

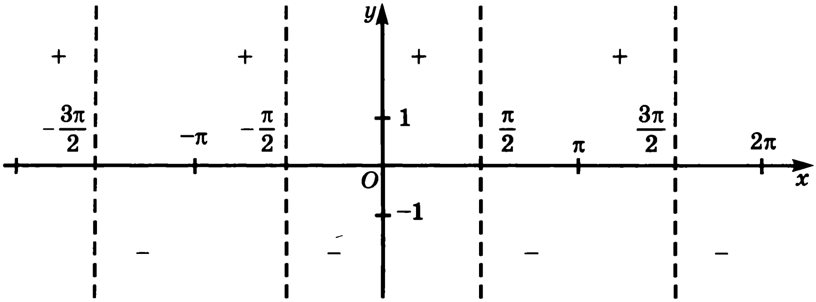



Рис. 124

Каждая тригонометрическая функция имеет бесконечно много нулей. Для каждой из них расстояние между двумя любыми соседними нулями равно $\pi$.

Нули синуса разбивают ось $x$ на равные по длине непересекающиеся открытые промежутки (см. рис. 122). Выясним, какие значения, положительные или отрицательные, принимает синус в каждом из этих промежутков.

При повороте начального радиуса на угол $\alpha$ (см. рис. 114) при $0 < \alpha < \pi$ точка $B$ будет находиться выше оси $x$, а поэтому ее ордината $y$ будет больше нуля. Значит, в промежутке $(0; \pi)$ функция $\sin \alpha$ принимает положительные значения (см. рис. 122).

При $\pi < \alpha < 2\pi$ точка $B$ будет находиться ниже оси $x$ и ее ордината $y$ будет меньше нуля. Значит, в промежутке $(\pi; 2\pi)$ функция $\sin \alpha$ принимает отрицательные значения. Тождество $\sin (x + 2\pi n) = \sin x$, где $n$ — целое число, позволяет заключить, что промежутки с положительными и отрицательными значениями синуса будут строго чередоваться на всей оси $x$. Это отмечено на рисунке 122 знаками + и −.

Аналогичные рассуждения показывают, что значения $\cos \alpha$ при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ положительны, а при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ — отрица-

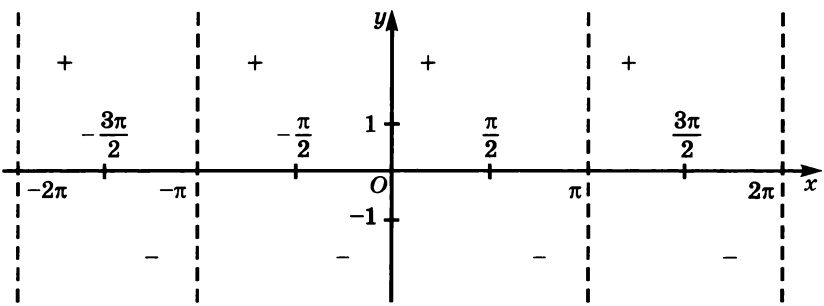



Рис. 125

тельны. Такое чередование положительных и отрицательных промежутков происходит на всей оси $x$ (см. рис. 123).

Таким же образом можно выделить промежутки, в которых положителен или отрицателен тангенс. При этом кроме нулей важную роль играют те значения углов, при которых тангенс не имеет смысла. На рисунке 124 эти значения показаны штриховыми линиями. Знаками + и − обозначены промежутки положительных или отрицательных значений тангенса. Их длина в два раза меньше соответствующих промежутков для синуса и косинуса.

Промежутки положительных и отрицательных значений котангенса показаны на рисунке 125.

Из определения тригонометрических функций и знаков абсциссы и ординаты точки $B$ в различных четвертях следует, что для углов I четверти $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; для углов II четверти $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$; для углов III четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; для углов IV четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$.

Знаки тригонометрических функций в различных четвертях показаны на рисунке 126.

Формулы (3), рассмотренные в пункте 46, выражают известные вам свойства нечетности и четности тригонометрических функций.

В заключение отметим еще одно важное свойство тригонометрических функций. В пункте 46 было доказано, что при любом $n \in \mathbf{Z}$ имеют место тождества:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Для синуса и косинуса эти тождества означают, что значения синуса и косинуса не изменяются от прибавления к любому значению $\alpha$ чисел вида $2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Такие числа называют периодами


Рис. 126

функций синуса и косинуса. Для тангенса и котангенса периодами являются числа вида $\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Определение. **Периодом функции $f$ называется такое число $l \neq 0$, если для любого $x \in D(f)$ выполняются равенства $f(x) = f(x + l) = f(x - l)$.**

Из этого определения и тождества $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha$ следует, что функция синус имеет бесконечно много периодов. Наименьшим положительным из них является число $2\pi$.

Доказательство. Предположим, что существует положительное число $l < 2\pi$ такое, что $\sin(x + l) = \sin x$ для любого значения $x$. Тогда $\sin l = 0$ при $x = 0$, так как $\sin x = 0$. Значит, число $l$ является нулем функции. Мы знаем, что в промежутке $(0; 2\pi)$ существует только один нуль синуса, равный $\pi$. Но для числа $\pi$ не выполняется тождество $\sin(x + \pi) = \sin x$, так как, например, для

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\text{а } \sin(x + \pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\frac{3}{2}\pi = -1.$$

Аналогично можно доказать, что наименьшим положительным периодом для косинуса является число $2\pi$, а для тангенса и котангенса — число $\pi$. Наименьший положительный период, если он существует, называют *основным* периодом функции.

Функции, имеющие периоды, называются *периодическими функциями*. Значит, известные нам тригонометрические функции синус, косинус, тангенс и котангенс являются периодическими функциями.

Если угол поворота выражается в градусах, то основной период синуса и косинуса равен 360°, а период тангенса и котангенса равен 180°.

Заметим, что изучавшиеся нами ранее функции, например линейная, квадратичная и степенная, не являются периодическими. Однако кроме тригонометрических есть и другие периодические функции. Примером может служить функция $y = \{x\}$. Запись $\{x\}$ является обозначением *дробной части числа* $x$, т. е. разности между числом и его целой частью:

$$\{x\} = x - [x].$$

Периодом функции $y = \{x\}$ является любое целое число $n$, не равное нулю, так как для любого значения $x$ верно равенство

$$\{x + n\} = \{x\}.$$

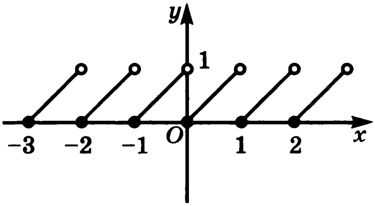



Рис. 127

В самом деле,

$$\{x + n\} = (x + n) - [x + n] =$$
$$= x + n - [x] - n = x - [x] = \{x\}.$$

Наименьшим положительным периодом для этой функции является число 1.

График функции изображен на рисунке 127. Он состоит из частей линейных функций вида $y = x + n$, где $n$ — целое число.

Пример. Найдем основные периоды функций $\sin 2x$ и $\operatorname{tg}\frac{1}{3}x$.

От прибавления к $2x$ чисел вида $2\pi n$ и к $\frac{1}{3}x$ чисел вида $\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, значения функций $\sin 2x$ и $\operatorname{tg}\frac{1}{3}x$ не меняются:

$$\sin(2x + 2\pi n) = \sin 2x,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x + \pi n\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{3}x.$$

Так как

$$\sin(2x + 2\pi n) = \sin(2(x + \pi n))$$
$$\text{и } \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x + \pi n\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}(x + 3\pi n)\right),$$

то, следовательно, периодами функции $\sin 2x$ являются числа $\pi n$, а периодами функции $\operatorname{tg}\frac{1}{3}x$ — числа $3\pi n$. Значит, основным периодом функции $\sin 2x$ является число $\pi$, а $\operatorname{tg}\frac{1}{3}x$ — число $3\pi$.

**1069.** Найдите нули тригонометрических функций в промежутке:

а) $(2{,}8\pi;\ 4{,}1\pi)$;
б) $(-3{,}5\pi;\ -0{,}7\pi)$;
в) $(-1{,}2\pi;\ 2{,}6\pi)$;
г) $(35°;\ 280°)$;
д) $(-390°;\ -25°)$;
е) $(-206°;\ 95°)$.

**1070.** Найдите в промежутке $(-1{,}6\pi;\ 2{,}7\pi)$ корни уравнения:

а) $\sin x = 0$;
б) $\cos x = 0$;
в) $\operatorname{tg} x = 0$;
г) $\operatorname{ctg} x = 0$.

**1071.** Какой знак имеют $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если:
а) $\alpha = 0{,}8\pi$;
б) $\alpha = 1{,}3\pi$;
в) $\alpha = -0{,}4\pi$;
г) $\alpha = -1{,}4\pi$;
д) $\alpha = 189°$;
е) $\alpha = -200°$?

**1072.** Выясните, какой знак имеют следующие функции:
а) $\operatorname{tg} 175°$;
б) $\sin 101°$;
в) $\cos 355°$;
г) $\operatorname{ctg} 208°$;
д) $\sin\frac{\pi}{10}$;
е) $\cos\frac{5\pi}{2}$;
ж) $\operatorname{tg} 0{,}9\pi$;
з) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$;
и) $\cos(-100°)$;
к) $\sin(-1{,}5\pi)$;
л) $\operatorname{tg}(-300°)$;
м) $\operatorname{ctg}(-1{,}9\pi)$.

**1073.** Сравните:
а) $\sin^2\frac{\pi}{15}$ и $\sin\frac{\pi}{15}$;
б) $\cos\frac{5\pi}{6}$ и $\cos^2\frac{5\pi}{6}$;
в) $\operatorname{tg} 80°$ и $\operatorname{tg} 80° \sin 140°$;
г) $\operatorname{ctg} 200° \cos 35°$ и $\operatorname{ctg} 200°$.

**1074.** Докажите неравенство:
а) $\cos^2\alpha < \cos\alpha$, если $270° < \alpha < 360°$;
б) $\operatorname{tg}\alpha > \sin\alpha$, если $0° < \alpha < 90°$;
в) $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$, если $0° < \alpha < 90°$;
г) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$, если $180° < \alpha < 270°$.

**1075.** Углом какой четверти является угол $\alpha$, если:
а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$;
б) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$;
в) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$;
г) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$;
д) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha < 0$;
е) $\cos\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$;
ж) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$;
з) $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ и $\sin\alpha < 0$?

**1076.** К какой четверти может относится угол $\alpha$, если:
а) $|\sin\alpha| - \sin\alpha = 0$;
б) $|\cos\alpha| + \cos\alpha = 0$;
в) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha = 0$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha + |\operatorname{ctg}\alpha| = 0$?

**1077.** Найдите основной период функции:
а) $\sin 3x$;
б) $\cos 0{,}5x$;
в) $\operatorname{tg} 5x$;
г) $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x$;
д) $\sin \pi x$;
е) $\operatorname{tg}\pi x$.

**1078.** Докажите, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases}$$

является периодической и что она не имеет наименьшего положительного периода.

**1079.** Является ли периодической функция:

а) $y = \sin|x|$; б) $y = |\sin x|$; в) $y = \cos^2 x$?

**1080.** Найдите три значения $x$, при которых верно равенство:

а) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$; в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

б) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; г) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

### Упражнения для повторения

**1081.** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{32a^3b^5}$; б) $\sqrt{\frac{a^6b^7}{81c^8}}$, где $b \geqslant 0$, $c \neq 0$.

**1082.** Внесите множитель под знак корня:

а) $a^2b\sqrt[4]{-3b}$, где $b \leqslant 0$; б) $\frac{ab^2}{2}\sqrt[3]{\frac{16x}{a^2b^6}}$.

**1083.** Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\sin(-x)\cos x}$; б) $y = \sqrt{-\sin x \cos(-x)}$.

**1084.** Из села в город, расстояние до которого 72 км, выехал велосипедист. Через час из города в село выехал другой велосипедист и прибыл в село через 2 ч после их встречи. Найдите скорость первого велосипедиста, если он прибыл в город через 3 ч после встречи.

## 48. Графики и основные свойства синуса и косинуса

Построим график функции $y = \sin x$, где $x$ радиан — угол поворота начального радиуса. Областью определения синуса является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$. Это означает, что каждому числу соответствует единственная точка графика.

Так как синус есть периодическая функция с периодом $2\pi$, то можно сначала построить график по точкам в каком-нибудь промежутке с длиной $2\pi$, например, в промежутке $[-\pi; \pi]$, а затем переместить построенную часть графика параллельно оси $x$ на $\pm 2\pi$; $\pm 4\pi$; $\pm 6\pi$, ... .

Область значений синуса есть промежуток $[-1; 1]$. Отсюда следует, что весь график функции располагается внутри полосы, ограниченной прямыми $y = -1$ и $y = 1$, и функция $y = \sin x$ ограничена.

Приступим к построению графика. Сначала на оси $x$ отметим числа $0$; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $\pm 3\pi$; ... , являющиеся нулями функции $y = \sin x$ (рис. 128). График этой функции проходит через отмеченные точки. В промежутке $(-\pi; 0)$ синус принимает отрицательные значения, а в промежутке $(0; \pi)$ — положительные (см. рис. 122). Поэтому в первом из этих промежутков график расположен под осью $x$, а во втором — над осью $x$.

Теперь уточним ход графика в промежутке $[-\pi; \pi]$. Составим таблицу приближенных значений функции $y = \sin x$ с шагом $\frac{1}{8}\pi$:

| $x$ | $-\pi$ | $-\frac{7}{8}\pi$ | $-\frac{6}{8}\pi$ | $-\frac{5}{8}\pi$ | $-\frac{4}{8}\pi$ | $-\frac{3}{8}\pi$ | $-\frac{2}{8}\pi$ | $-\frac{1}{8}\pi$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | −0,38 | −0,71 | −0,92 | −1 | −0,92 | −0,71 | −0,38 | 0 |

| $x$ | $\frac{1}{8}\pi$ | $\frac{2}{8}\pi$ | $\frac{3}{8}\pi$ | $\frac{4}{8}\pi$ | $\frac{5}{8}\pi$ | $\frac{6}{8}\pi$ | $\frac{7}{8}\pi$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,38 | 0,71 | 0,92 | 1 | 0,92 | 0,71 | 0,38 | 0 |

Отметим точки графика по их координатам, указанным в таблице, и проведем через них плавную кривую линию. Если эту кривую переместить вправо и влево на $2\pi$, $4\pi$, $6\pi$, ... , то получится график функции $y = \sin x$, называемый *синусоидой*.

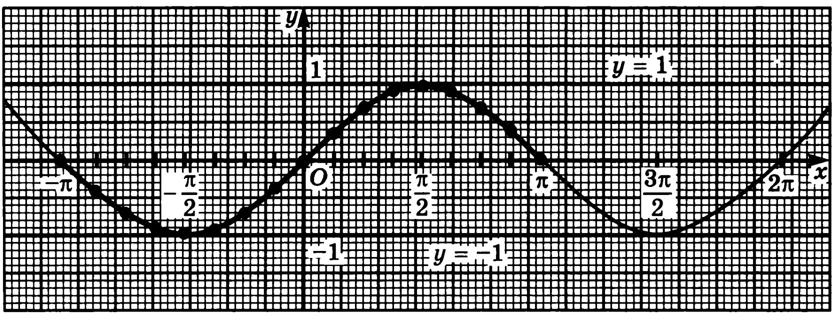



Рис. 128

Заметим, что таблицу проще всего составить с помощью калькулятора.

Мы уже рассмотрели некоторые свойства тригонометрических функций. Теперь сформулируем основные свойства функции $y = \sin x$, область определения которой — промежуток $(-\infty; +\infty)$, и посмотрим, как эти свойства отражаются на графике.

1) Нулями функции $y = \sin x$ являются числа $\pi n$, где $n$ — целое число. Эти числа — абсциссы общих точек графика и оси $x$.

2) Функция $y = \sin x$ принимает положительные значения в промежутках $(\pi n; \pi(n + 1))$, где $n$ — четное число, и отрицательные значения — в промежутках $(\pi n; \pi(n + 1))$, где $n$ — нечетное число. В первом случае в указанных промежутках график расположен выше оси $x$, а во втором случае — ниже оси $x$.

3) Функция $y = \sin x$ возрастает от $-1$ до 1 в каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, где $n$ — четное число, и убывает от 1 до $-1$ в промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, где $n$ — нечетное число. Значит, эта функция является ограниченной. Из двух любых точек промежутка возрастания выше расположена та, которая лежит правее. Если эти точки находятся в промежутке убывания, то ниже расположена та, которая лежит правее. Иными словами, по мере продвижения по оси $x$ вправо график идет в промежутке возрастания снизу вверх, а в промежутке убывания — сверху вниз.

4) Функция $y = \sin x$ нечетная, так как при любом значении $x$ верно равенство $\sin(-x) = -\sin x$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

5) Функция $y = \sin x$ периодическая. Ее основной период равен $2\pi$. При параллельном переносе графика функции в направлении луча $Ox$ или в противоположном ему направлении на целое число периодов график совпадает сам с собой.

6) Областью значений функции $y = \sin x$ является промежуток $[-1; 1]$. Значит, синусоида заключена в полосе, ограниченной прямыми $y = -1$ и $y = 1$. Она касается этих прямых в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число.

7) Функция $y = \sin x$ имеет наибольшее значение, равное 1, в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число, и наименьшее значение, равное $-1$, в точках $-\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число.

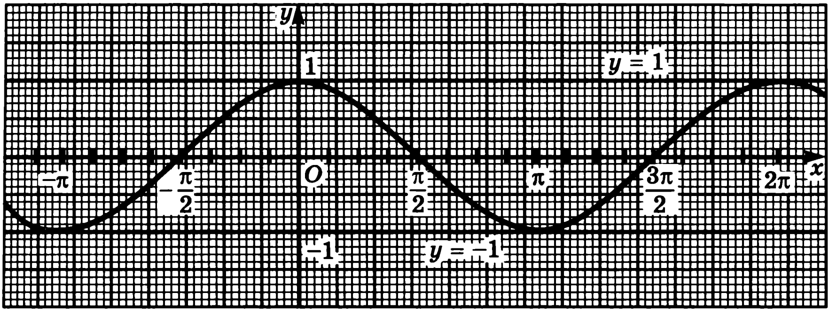



**Рис. 129**

8) Функция $y = \sin x$ необратима. Это означает, что найдутся прямые $y = z$, которые пересекают график функции более чем в одной точке.

Таким же образом можно построить график функции $y = \cos x$ (рис. 129). Позже будет доказано, что этим графиком является также синусоида, которая получается из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом влево на $\frac{\pi}{2}$ единиц.

Сформулируем основные свойства функции $y = \cos x$, область определения которой — промежуток $(-\infty; +\infty)$.

1) Нулями функции $y = \cos x$ являются числа $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число.

2) Функция $y = \cos x$ принимает положительные значения в промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n$ — четное число, а отрицательные значения — в промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n$ — нечетное число.

3) Функция $y = \cos x$ возрастает от $-1$ до $1$ в каждом из промежутков $[\pi n; \pi(n + 1)]$, где $n$ — нечетное число, и убывает от $1$ до $-1$ в каждом из промежутков $[\pi n; \pi(n + 1)]$, где $n$ — четное число. Эта функция ограниченная.

4) Функция $y = \cos x$ четная, так как при любом значении $x$ верно равенство $\cos(-x) = \cos x$.

5) Функция $y = \cos x$ периодическая. Ее основной период равен $2\pi$.

6) Областью значений функции $y = \cos x$ является промежуток $[-1; 1]$.

7) Функция имеет наибольшее значение, равное 1, в точках $2\pi n$, где $n$ — целое число, и наименьшее значение, равное $-1$, в точках $\pi + 2\pi n$, где $n$ — целое число.

8) Функция $y = \cos x$ необратима.

Свойства функции $y = \cos x$ так же отражаются на ее графике, как и свойства функции $y = \sin x$.

**1085.** Как изменяются функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в каждой из координатных четвертей?

**1086.** Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$;

**1087.** Найдите область значений функции:

а) $y = 1 + \sin x$; в) $y = 1 + |\sin x|$;

б) $y = 1 - \cos x$; г) $y = 1 - |\cos x|$.

**1088.** В каких промежутках функция $y = \dfrac{1}{\sin x}$ принимает:

а) положительные значения; б) отрицательные значения?

**1089.** Сравните:

а) $\sin 718°$ и $\sin 719°$; в) $\sin\dfrac{12\pi}{5}$ и $\sin\dfrac{11\pi}{5}$;

б) $\cos(-516°)$ и $\cos(-514°)$; г) $\cos\dfrac{25}{8}\pi$ и $\cos\dfrac{27}{8}\pi$.

**1090.** При каких значениях $\alpha$ из промежутка $[0°; 90°]$

а) $\sin\alpha < \cos 30°$; в) $\cos\alpha > \sin 60°$;

б) $\sin\alpha > \cos 45°$; г) $\cos\alpha < \sin 45°$?

**1091.** Докажите неравенство:

а) $\sin 31° + \cos 59° > 1$; б) $\sin 58° + \cos 61° < \sqrt{3}$.

**1092.** При каких значениях $x$ из промежутка $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sin x}$; б) $\sqrt{\dfrac{1}{2} - \cos x}$; в) $\sqrt{\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$; г) $\sqrt{\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$?

**1093.** Является ли периодической функция:

а) $y = 1 + \sin x$; в) $y = \cos x - 2\pi$;

б) $y = x + \cos x$; г) $y = \sin x - x$?

**1094.** Какие преобразования надо выполнить, чтобы из графика функции $y = \cos x$ получить график функции:

а) $y = -\cos x$; в) $y = \dfrac{1}{2}\cos(x + 2)$;

б) $y = \cos(-x)$; г) $y = -2\cos(x - 2)$?

**1095.** Постройте график функции $y = f(x)$ и опишите ее свойства, если:

а) $f(x) = -\sin x$; б) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

**1096.** Какова область значений функции:

а) $y = -1 - \sin(-x)$; в) $y = |\sin(-x)| + 1$;

б) $y = -1 - \cos(-x)$; г) $y = |\cos(-x) - 1|$?

### Упражнения для повторения

**1097.** Представьте в виде дроби с рациональным знаменателем выражение:

а) $\dfrac{5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{4}}$; б) $\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$.

**1098.** Решите уравнение

$$\sqrt{2x} + \sqrt{x + 7} + \sqrt[4]{x - 1} = 6.$$

## 49. Графики и основные свойства тангенса и котангенса

Построим график функции $y = \operatorname{tg} x$, где $x$ радиан — угол поворота начального радиуса. Пусть начальный радиус $OA$ повернули на угол $x$ радиан и при этом точка $A$ перешла в точку $B$. Тангенс угла поворота есть отношение ординаты точки $B$ к ее абсциссе. Если абсцисса точки $B$ равна нулю, то отношение к ней ординаты не имеет смысла. Это возможно лишь тогда, когда точка $B$ оказывается на оси $y$, а следовательно, когда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число. Значит, областью определения тангенса является множество $\boldsymbol{R}$, за исключением чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число. Исключение этих чисел показано на рисунке 130 пунктирными линиями. Каждому числу из области определения соответствует единственная точка графика.

Так как тангенс — периодическая функция с периодом $\pi$, то сначала построим график в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, длина которого равна $\pi$, а затем построенную часть перенесем параллельно оси абсцисс на $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... .

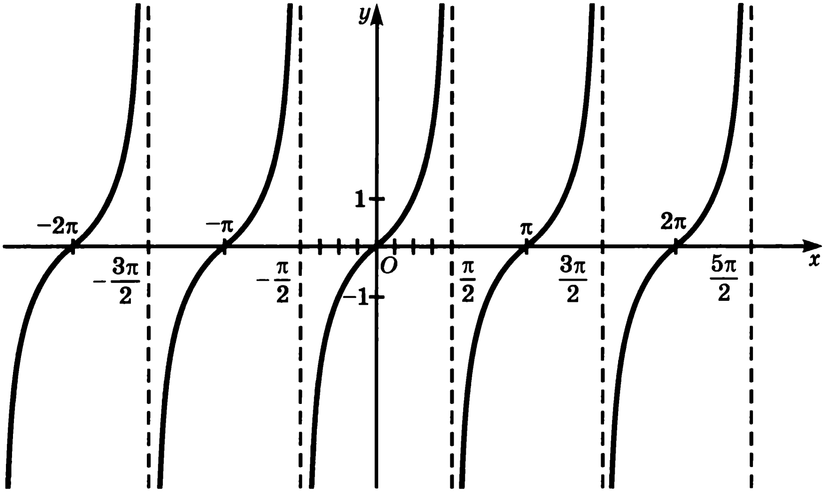



Рис. 130

Сначала на оси абсцисс отметим числа 0; $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... , являющиеся нулями функции. График этой функции пройдет через отмеченные точки. В промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ тангенс принимает отрицательные значения, а в промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ — положительные (см. рис. 124). Поэтому в первом из этих промежутков график расположен под осью абсцисс, а во втором — над осью абсцисс.

Теперь уточним ход графика в рассматриваемом промежутке. Составим таблицу приближенных значений функции $y = \operatorname{tg} x$ с шагом $\frac{1}{8}\pi$.

| $x$ | $-\frac{3}{8}\pi$ | $-\frac{2}{8}\pi$ | $-\frac{1}{8}\pi$ | 0 | $\frac{1}{8}\pi$ | $\frac{2}{8}\pi$ | $\frac{3}{8}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −2,41 | −1 | −0,41 | 0 | 0,41 | 1 | 2,41 |

Разделим промежуток $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ на рисунке на 8 равных частей. Точкам деления будут соответствовать значения аргумента тангенса из верхней строки таблицы. Отметим точки графика и проведем через них плавную кривую. Если эту кривую переместить вправо и влево на $\pi$, $2\pi$, $3\pi$, ... , то получится график функции $y = \operatorname{tg} x$.

Теперь сформулируем основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, область определения которой — множество $\boldsymbol{R}$, из которого исключены числа $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число.

1) Нулями функции $y = \operatorname{tg} x$ являются числа $\pi n$, где $n$ — целое число. Эти числа — абсциссы общих точек оси $x$ и графика.

2) Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает положительные значения в каждом из промежутков $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n$ — целое число. В этих промежутках ее график расположен выше оси $x$. В промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$ тангенс принимает отрицательные значения. График функции $y = \operatorname{tg} x$ в этих промежутках расположен ниже оси $x$.

3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ в промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, эта функция является неограниченной. В самом деле, при возрастании угла поворота от 0 до $\frac{\pi}{2}$, когда точка $A$ начального радиуса $OA$ переходит в точку $B$, точка $B$ приближается к оси $y$. Ее ордината увеличивается, а абсцисса стремится к нулю. Тангенс становится больше любого наперед заданного положительного числа. По мере продвижения по оси $x$ вправо в каждом промежутке возрастания график идет круто вверх.

4) Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная, так как при любом значении $x$ из области определения верно равенство $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

5) Функция $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая. Ее основной период равен $\pi$. При параллельном переносе графика функции как в направлении луча $Ox$, так и в противоположном ему направлении на целое число периодов ее график совпадает сам с собой.

6) Областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

7) Функция $y = \operatorname{tg} x$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8) Функция $y = \operatorname{tg} x$ необратима.

Таким же образом можно построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 131). Ее свойства аналогичны свойствам функции $y = \operatorname{tg} x$. Область определения котангенса — множество $\boldsymbol{R}$, из которого исключены числа $\pi n$, где $n$ — целое число.

1) Нулями функции $y = \operatorname{ctg} x$ являются числа $-\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n$ — целое число. Они суть абсциссы общих точек графика и оси $x$.

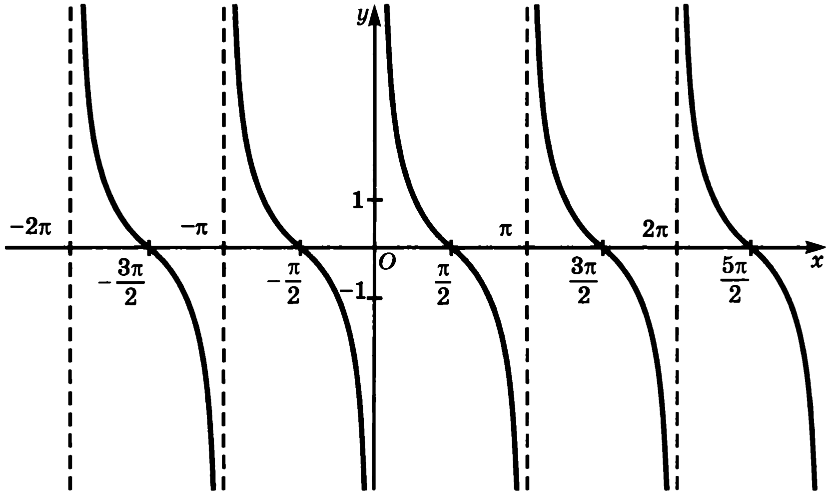



**Рис. 131**

2) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает положительные значения в промежутках $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n$ — целое число. В промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$ она принимает отрицательные значения. В первых промежутках график расположен выше оси $x$, а во вторых — ниже.

3) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ в промежутках $(\pi n; \pi(n + 1))$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, неограниченно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. При движении по оси $x$ слева направо график котангенса идет сверху вниз в каждом промежутке убывания.

4) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечетная, так как при любом значении $x$ из области определения верно равенство $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

5) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая. Ее основной период равен $\pi$. При параллельном переносе графика функции как в направлении луча $Ox$, так и в противоположном ему направлении на целое число $\pi$ ее график совпадает с самим собой.

6) Областью значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

7) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ необратима.

**1099.** Как изменяются функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ в каждой из координатных четвертей?

**1100.** Найдите область значений функции:

а) $y = 1 + |\operatorname{tg} x|$; в) $y = \sqrt{-\operatorname{tg} x}$;

б) $y = 1 - |\operatorname{ctg} x|$; г) $y = \sqrt{\operatorname{ctg}(-x)}$.

**1101.** В каких промежутках принимает положительные и в каких — отрицательные значения функция:

а) $y = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$; б) $y = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$?

**1102.** Сравните:

а) $\operatorname{ctg} 25°$ и $\operatorname{tg} 50°$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7}$ и $\sin\dfrac{5\pi}{18}$;

б) $\operatorname{tg} 25°$ и $\operatorname{ctg} 50°$; г) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{9}$.

**1103.** При каких значениях $x$ из промежутка $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ верно неравенство:

а) $\operatorname{tg} x > \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}$; б) $\operatorname{tg} x < \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}$; в) $\operatorname{ctg} x > \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$; г) $\operatorname{ctg} x > \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$?

**1104.** Докажите неравенство:

а) $\operatorname{tg} 46° + \operatorname{ctg} 44° > 2$; б) $3\operatorname{ctg}\dfrac{2}{5}\pi + 3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7} < 2\sqrt{3}$.

**1105.** При каких значениях $x$ из промежутка $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \operatorname{tg} x}$; в) $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$;

б) $\sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{ctg} x}$; г) $\sqrt{\operatorname{ctg} x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$?

**1106.** Является ли периодической функция:

а) $y = 1 - \operatorname{tg} x$; в) $y = \pi + \operatorname{tg} 2x$;

б) $y = \operatorname{ctg} x + x$; г) $y = \operatorname{ctg} x + \sin x$?

**1107.** Найдите основной период функции:

а) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$; в) $y = \cos\dfrac{1}{2}x \operatorname{ctg}\dfrac{1}{3}x$;

б) $y = \cos\dfrac{3}{5}x + \sin\dfrac{3}{4}x$; г) $y = \sin 4x \operatorname{tg} 5x$.

**1108.** Является ли периодической функция:

а) $y = \operatorname{tg}(\sin x)$; б) $y = \sin(\operatorname{tg} x)$?

Какова область ее определения?

**1109.** Докажите, что функции

а) $y = x \sin x$ и $y = \sin x \operatorname{tg} x$ являются четными;

б) $y = x \cos x$ и $y = x + \sin x$ являются нечетными.

**1110.** С помощью каких преобразований из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ или $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить график функции:

а) $y = -2 \operatorname{tg} x$; в) $y = 5 \operatorname{tg}(x - 2)$;

б) $y = 3 \operatorname{ctg}(-x)$; г) $y = -4 \operatorname{ctg}(x + 1)$?

**1111.** Постройте график функции $y = f(x)$ и опишите ее свойства, если:

а) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$; б) $f(x) = -\operatorname{ctg} x$.

## Упражнения для повторения

**1112.** Докажите, что при любом значении $\alpha$ верно неравенство

$$\cos^2 \alpha + 9 > 6 \cos \alpha.$$

**1113.** Упростите выражение

$$\frac{\left(x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(x^{-\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(x^{-\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)^2}.$$

**1114.** Решите уравнение

$$\sqrt{x} + x = 2 - \sqrt{x - 4}.$$

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Сформулируйте определения четной и нечетной функций. Какие из тригонометрических функций являются четными и какие — нечетными?

**2.** Рассмотрите вопрос о нулях тригонометрических функций.

**3.** В каких промежутках тригонометрические функции принимают положительные и в каких — отрицательные значения?

**4.** В каких промежутках тригонометрические функции возрастают и в каких — убывают?

5. Что называется периодом функции? Назовите основной период каждой тригонометрической функции.

6. Сформулируйте основные свойства функции $y = \sin x$.

7. Сформулируйте основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

# § 19. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

## 50. Формулы приведения

Тригонометрические функции углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$ можно выразить через функции угла $\alpha$. Получаемые при этом формулы называют *формулами приведения.*

Начнем с формул приведения для синуса и косинуса угла $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$. Пусть при повороте начального радиуса $OA = R$ около точки $O$ на угол $\alpha$ он перейдет в радиус $OB$, тогда при повороте $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ на угол он перейдет в радиус $OC$ (рис. 132).

Повернем координатную плоскость по часовой стрелке около точки $O$ на $\frac{\pi}{2}$ радиана. При этом точка $C(x_2; y_2)$ перейдет в точку $B(x_1; y_1)$, так как $OB = OC$ и $\angle COB = \frac{\pi}{2}$. Ось $y$ перейдет в ось $x$. Поэтому ордината точки $C$ будет равна абсциссе точки $B$. Ось $x$ перейдет в ось, противоположную оси $y$. Поэтому абсцисса точки $C$ будет противоположна ординате точки $B$.

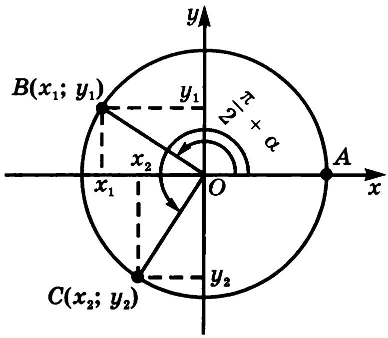



Рис. 132

Отсюда

$$y_2 = x_1, \quad x_2 = -y_1;$$
$$\frac{y_2}{R} = \frac{x_1}{R}, \quad \frac{x_2}{R} = -\frac{y_1}{R}.$$

Так как $\frac{y_2}{R} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, $\frac{x_1}{R} = \cos\alpha$, $\frac{x_2}{R} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ и $\frac{y_1}{R} = \sin\alpha$, то

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha. \qquad (1)$$

Первую формулу можно переписать в виде $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда следует, что график функции $y=\cos x$ можно получить из графика функции $y=\sin x$ с помощью переноса параллельно оси $x$ влево на $\frac{\pi}{2}$.

Используя формулы (1) и свойства синуса и косинуса, будем иметь:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha.$$

Значит,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Перейдем к углу $\pi+\alpha$:

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

Значит,

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha. \qquad (2)$$

Применяя формулы (2) и четность и нечетность тригонометрических функций, для угла $\pi-\alpha$ получим:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\pi+(-\alpha))=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\pi+(-\alpha))=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Применив к углу $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ формулы (1) и (2), будем иметь:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Значит,

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha. \qquad (3)$$

Для угла $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ имеем:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + (-\alpha)\right) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Если в формулах $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$ и $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$ вместо $n$ подставить 1, то получится

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha. \tag{4}$$

Отсюда

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha. \tag{5}$$

Рассмотрим формулы приведения для тангенса и котангенса. По определению тангенса и котангенса

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{y_2}{x_2};$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{x_2}{y_2}.$$

Так как $y_2 = x_1$ и $x_2 = -y_1$, то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{x_1}{y_1} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{y_1}{x_1} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{6}$$

Формулы приведения для тангенса и котангенса углов $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ можно получить аналогично тому, как были получены соответствующие формулы для синуса и косинуса:

Например,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)\right) = -\operatorname{ctg}(-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Выполнив аналогичные преобразования, найдем

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Напишем сводную таблицу всех формул приведения:

| $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ |
|---|---|
| $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ |
| $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ |
| $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$ |
| $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$ |
| $\pi + \alpha$ | $\pi - \alpha$ |
| $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ | $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ |
| $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ |
| $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ |
| $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ |

| $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ | $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ |
|---|---|
| $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$ | $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$ |
| $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$ | $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha$ |
| $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$ |
| $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$ |
| $2\pi + \alpha$ | $2\pi - \alpha$ |
| $\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$ | $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ |
| $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$ | $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ |
| $\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ |
| $\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ |

Рассматривая таблицу, можно заметить, что *для углов* $\pi \pm \alpha$ *и* $2\pi \pm \alpha$, *в которых первое слагаемое — целое число* $\pi$, *название функции не меняется. А для углов* $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ *и* $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$, *в которых первое слагаемое — дробное число* $\pi$, *название функции изменяется: синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс и котангенс на тангенс.*

Формулы приведения верны при любых допустимых значениях $\alpha$, в том числе и при положительных значениях $\alpha$, меньших $\frac{\pi}{2}$. Отсюда следует простое правило для определения знака правой части любой формулы приведения.

***Если при*** $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ***левая часть формулы приведения положительна, то правая часть берется со знаком «плюс», если отрицательна, то со знаком «минус».***

Пример 1. Выразим $\sin(\pi - \alpha)$ через тригонометрическую функцию угла $\alpha$.

При $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ угол $\pi - \alpha$ является углом II четверти. Синус угла II четверти положителен. Значит, правая часть формулы будет со знаком «плюс». Для угла $\pi - \alpha$ в правой части будет та же функция, что и в левой:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

Пример 2. Выразим $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ через тригонометрическую функцию угла $\alpha$.

При $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ угол $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ является углом III четверти. Косинус угла III четверти отрицателен. Значит, правая часть формулы должна быть со знаком «минус». Для угла $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ косинус заменяется синусом:

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha.$$

Пример 3. Упростим выражение $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$.

При $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ углы $\pi + \alpha$ и $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ являются углами III четверти, тангенс и котангенс которых положительны. Сохраняя тангенс и заменяя котангенс тангенсом, получим

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha.$$

**1115.** Выразите через тригонометрическую функцию угла от 0° до 90° функцию:

а) $\sin 95°$; в) $\operatorname{tg} 195°$; д) $\sin 350°$; ж) $\operatorname{tg} 108°$;
б) $\cos 170°$; г) $\operatorname{ctg} 260°$; е) $\cos 169°$; з) $\operatorname{ctg} 272°$.

**1116.** Приведите к тригонометрической функции угла от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функцию:

а) $\sin 0{,}8\pi$; в) $\operatorname{tg} 1{,}3\pi$; д) $\sin 1{,}7\pi$; ж) $\operatorname{tg} 1{,}9\pi$;
б) $\cos\frac{2}{3}\pi$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5}{4}\pi$; е) $\cos\frac{7}{4}\pi$; з) $\operatorname{ctg}\frac{9}{4}\pi$.

**1117.** Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{2}{3}\pi$; в) $\operatorname{tg}\frac{5}{6}\pi$; д) $\cos\frac{5}{3}\pi$; ж) $\sin\frac{11}{6}\pi$;
б) $\cos\frac{3}{4}\pi$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5}{4}\pi$; е) $\operatorname{tg}\frac{9}{4}\pi$; з) $\operatorname{ctg}\frac{7}{3}\pi$.

**1118.** Чему равно значение выражения:

а) $\operatorname{tg} 120°$; в) $\cos 210°$; д) $\sin 240°$; ж) $\operatorname{tg} 315°$;
б) $\sin 160°$; г) $\operatorname{ctg} 225°$; е) $\cos 300°$; з) $\operatorname{ctg} 420°$?

**1119.** Найдите значение выражения:

а) $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$; д) $\cos(-225°)$;

б) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$; е) $-\sin 225°$;

в) $-\operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi$; ж) $\operatorname{tg}(-330°)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$; з) $-\operatorname{ctg} 300°$.

**1120.** Упростите выражение:

а) $\cos(\alpha - \pi)$; г) $\operatorname{ctg}(\alpha - 2\pi)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; д) $\sin(\alpha - 90°)$;

в) $\sin\left(-\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$; е) $\cos(\alpha - 270°)$.

**1121.** Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}^2 1\frac{1}{6}\pi$; г) $\sin^2 \frac{7}{4}\pi$;

б) $\cos^2 2\frac{3}{4}\pi$; д) $\operatorname{tg}^2 330°$;

в) $\operatorname{ctg}^2 \frac{4}{3}\pi$; е) $\sin^2 315°$.

**1122.** Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

а) $\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

**1123.** Упростите выражение:

а) $\cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\sin(2\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) - \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$.

**1124.** Преобразуйте выражение:

а) $\frac{\cos(90° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha)} \cdot \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\sin\frac{\pi}{4}}$.

**1125.** Упростите выражение:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\pi + \alpha) + \sin(2\pi - \alpha)\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$;

б) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$.

**1126.** Преобразуйте выражение:

а) $\operatorname{tg}^2(\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$;

б) $\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \sin^2(\pi + \alpha)$;

в) $\cos^2(\pi + \alpha) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{ctg}(-\alpha) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$.

**1127.** Докажите тождество

$$\frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} \cdot \frac{\cos^2(-\alpha)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)} = \sin\alpha.$$

**1128.** Докажите равенство:

а) $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$.

**1129.** Выразите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через тригонометрические функции угла второй и третьей четвертей, если $\alpha$ — угол первой четверти.

**1130.** Найдите три значения $\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

г) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

д) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

е) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

**1131.** Докажите равенство:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

**1132.** Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sin 12^\circ \cos 24^\circ \sin 36^\circ \cos 48^\circ}{\sin 42^\circ \cos 54^\circ \sin 66^\circ \cos 78^\circ}$; б) $\frac{\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{ctg} 80^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ}$.

## Упражнения для повторения

**1133.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x + 1}} = 4$;

б) $\sqrt{x^2 + 4x - 9} - \sqrt{x^2 + 4x - 20} = 1$.

**1134.** Найдите целые корни уравнения

$$x^5 + x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36 = 0.$$

**1135.** Покажите штриховкой в координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ \frac{1}{2}xy \geqslant 6. \end{cases}$$

## 51. Решение простейших тригонометрических уравнений

Знание свойств тригонометрических функций помогает решать простейшие тригонометрические уравнения, уравнения, в которых под знаком тригонометрических функций содержатся переменные.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Синус — функция периодическая, основной период которой равен $2\pi$. Поэтому сначала найдем все корни уравнения в любом промежутке, длина которого $2\pi$. Удобно взять промежуток $[-\pi; \pi]$ (рис. 133). Синус принимает положительные значения на его частях $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. В промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ синус возрастает от 0

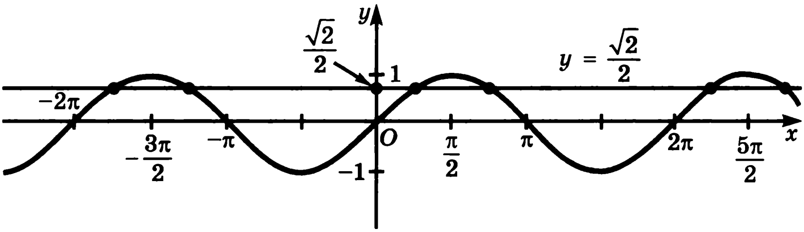



Рис. 133

до 1 и поэтому каждое из этих значений принимает лишь один раз. Так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\frac{\pi}{4}$ является единственным корнем уравнения в этом промежутке. По графику видно, что в промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, в котором синус убывает, есть еще один корень уравнения. Его можно найти, используя формулы приведения:

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, $\pi - \frac{\pi}{4}$ — корень уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащий промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Других корней в промежутке $[-\pi; \pi]$ нет.

Так как синус — периодическая функция, то все корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ дают две формулы:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

где $n$ — целое число.

Вторую формулу можно записать иначе:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi(2n + 1).$$

О т в е т: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi(2n + 1)$, где $n$ — целое число.

Если на рисунке провести прямую $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то она пересечет синусоиду в точках, абсциссы которых являются корнями уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

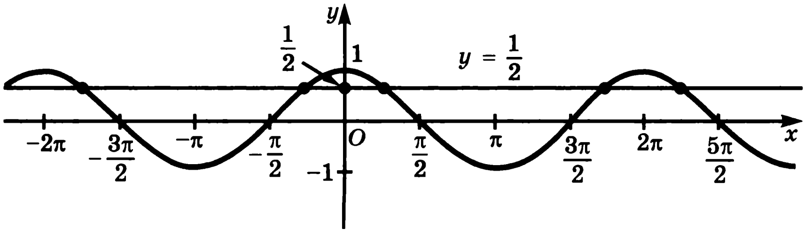



Рис. 134

П р и м е р 2. Решим уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Основной период косинуса равен $2\pi$ (рис. 134). Возьмем промежуток $[-\pi; \pi]$, длина которого $2\pi$. Он состоит из двух промежутков $[-\pi; 0]$ и $[0; \pi]$. В первом из них косинус возрастает от $-1$ до $1$, а во втором — убывает от $1$ до $-1$. Как в том, так и в другом промежутке косинус принимает каждое свое значение только один раз.

Так как $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то $\frac{\pi}{3}$ единственный корень уравнения в промежутке $[0; \pi]$. Второй корень находится в промежутке $[-\pi; 0]$, в котором косинус возрастает. Этот корень равен $-\frac{\pi}{3}$, так как

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Все корни уравнения находятся по формулам

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

где $n$ — целое число.

О т в е т: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n$ — целое число.

П р и м е р 3. Решим уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Тангенс — функция периодическая с основным периодом, равным $\pi$ (рис. 135). Возьмем промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, в котором

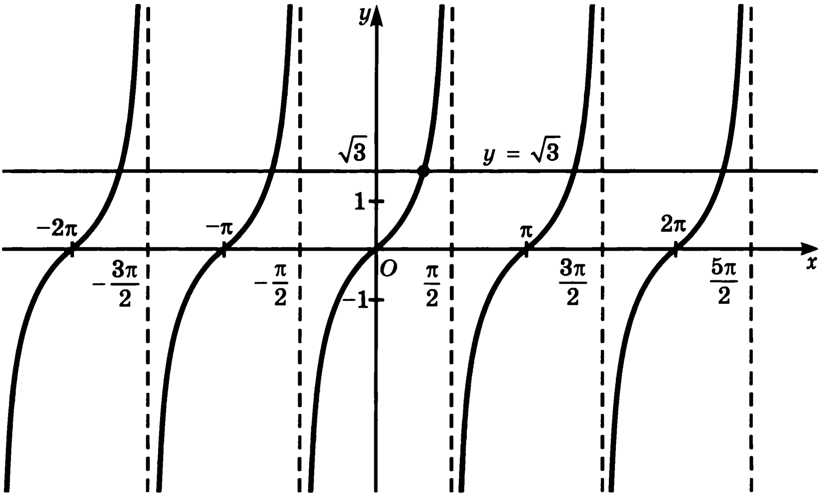



Рис. 135

тангенс возрастает. В этом промежутке тангенс принимает каждое из своих значений только один раз. Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, то число $\frac{\pi}{3}$, принадлежащее промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, является корнем уравнения. Все корни уравнения находятся по формуле

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

где $n$ — целое число.

Пример 4. Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = 1$.

Основной период котангенса равен $\pi$. Возьмем промежуток $(0; \pi)$, в котором функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (рис. 136). Поэтому она принимает каждое свое значение лишь один раз. Так как $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$, то число $\frac{\pi}{4}$, принадлежащее промежутку $(0; \pi)$, является корнем уравнения. Все корни уравнения находятся по формуле

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

где $n$ — целое число.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n$ — целое число.

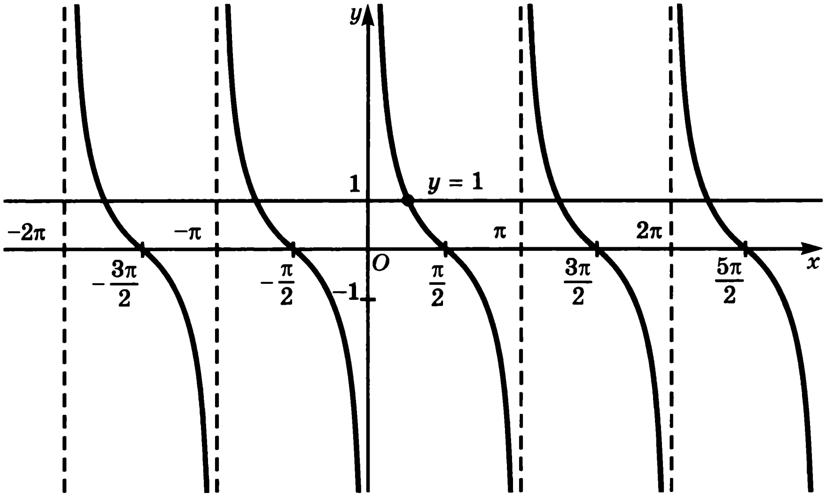



**Рис. 136**

**1136.** Решите уравнение:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; е) $\operatorname{tg} x = -1$.

**1137.** Найдите множество корней уравнения:

а) $\cos x = 0$; г) $\sin x = -1$; ж) $\operatorname{tg} x = 0$;
б) $\sin x = 0$; д) $\sin x = 1$; з) $\operatorname{ctg} x = 0$.
в) $\cos x = 1$; е) $\cos x = -1$;

**1138.** Решите уравнение:

а) $\sin^2 x - \sin x = 0$; г) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$;
б) $\cos x - \cos^2 x = 0$; д) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x = 0$;
в) $\cos^2 x + \cos x = 0$; е) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$.

**1139.** Найдите множество корней уравнения:

а) $\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $-2\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}$;

б) $\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$; е) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{2}$;

в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$; ж) $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = -\sqrt{3}$;

г) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; з) $-\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$.

**1140.** Решите уравнение:

а) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$; в) $2\cos^2 x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 0$;

б) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; г) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

**1141.** Какие значения $x$ удовлетворяют уравнению:

а) $\sin x = a$, если $|a| \leqslant 1$, $\sin x_0 = a$ и $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg} x = a$, если $\operatorname{tg} x_0 = a$ и $-\frac{\pi}{2} < x_0 < 0$?

**1142.** В каких точках пересекает график функции

а) $y = \cos(x - \pi)$ прямая $y = \frac{1}{2}$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ прямая $y = -1$?

## Упражнения для повторения

**1143.** Постройте график функции:

а) $y = \cos x$ в промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$;

б) $y = \operatorname{tg} x$ в промежутке $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$.

**1144.** Найдите наибольший член последовательности, заданной формулой:

а) $a_n = -2n^2 + 10n - 11$; б) $a_n = 30n - n^3$.

**1145.** Упростите выражение

$$\left(x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}\right)^2 \cdot x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$$

## 52. Связь между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Повернем начальный радиус $OA = R$ (рис. 137) около точки $O$ на произвольный угол $\alpha$. При этом повороте точка $A$ перейдет в точку $B(x; y)$. Напишем уравнение окружности с центром $O$ и радиусом $R$:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Любые значения $x$ и $y$, являющиеся координатами точки, принадлежащей этой окружности, обращают ее уравнение в верное равенство. Разделим обе части равенства $x^2 + y^2 = R^2$, где $x$ и $y$ — координаты точки $B$, на $R^2$, получим

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Запишем иначе:

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1.$$

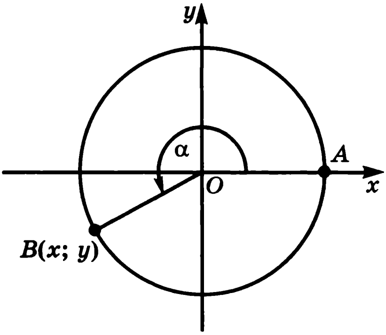



Рис. 137

По определению синуса и косинуса $\frac{y}{R} = \sin\alpha$ и $\frac{x}{R} = \cos\alpha$. Значит,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Равенство (1) верно при любых значениях $\alpha$, а следовательно, является тождеством. Это тождество выражает связь между синусом и косинусом одного и того же аргумента.

По определению тангенса и котангенса $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$. Разделим числитель и знаменатель каждой из дробей на $R$. Получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{y}{R}}{\frac{x}{R}}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\frac{x}{R}}{\frac{y}{R}}.$$

Так как $\frac{y}{R} = \sin\alpha$ и $\frac{x}{R} = \cos\alpha$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Равенство (2) верно при всех значениях $\alpha$, которые не являются нулями косинуса, а равенство (3) верно при всех значениях $\alpha$, не являющихся нулями синуса. Следовательно, равенства (2) и (3) — тождества в областях определения тангенса и котангенса.

Из тождеств (2) и (3) получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1.$$

Значит,

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1. \qquad (4)$$

Равенство (4) является тождеством на множестве действительных чисел, исключая нули синуса и косинуса.

Из тождества (1) можно получить равенства, выражающие зависимость между тангенсом и косинусом, а также между котангенсом и синусом.

Разделим обе части тождества (1) на $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \qquad (5)$$

Разделим обе части тождества (1) на $\sin^2 \alpha$:

$$1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Значит,

$$1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \qquad (6)$$

Равенства (5) и (6) являются тождествами на множестве действительных чисел, для формулы (5) — за исключением нулей косинуса, а для формулы (6) — за исключением нулей синуса.

Выпишем тождества (1) — (6):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \qquad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Эти тождества называют *основными тригонометрическими тождествами*. С их помощью можно найти значения тригонометрических функций по значению одной из них при некоторых дополнительных условиях.

Пример 1. Найдем $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

Используя тождество (1), найдем $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{9}{25}.$$

Так как угол $\alpha$ является углом IV четверти, то его синус отрицателен. Поэтому

$$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

Теперь можно найти тангенс и котангенс угла $\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1\frac{1}{3}$.

Пример 2. Найдем $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Из тождества (4) получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -2.$$

Так как $\alpha$ является углом II четверти, то его синус положителен. Используя тождество (6), найдем:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{5}{4};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{4}{5};$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

С помощью тождества (3) найдем

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \sin\alpha = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

**1146.** Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2\alpha$;
б) $1 - \cos^2\alpha$;
в) $\sin^2\alpha - 1$;
г) $\cos^2\alpha - 1$;
д) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$;
е) $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$;
ж) $(\sin\alpha + 1)(\sin\alpha - 1)$;
з) $(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1)$.

**1147.** Преобразуйте выражение:

а) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1$;
б) $1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
в) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
г) $\sin^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha$;
д) $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1$;
е) $2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1$;
ж) $1 - 2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
з) $1 - \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$.

**1148.** Упростите выражение:

а) $\sin^2\alpha - (1 - 2\cos^2\alpha)$;
б) $-\cos^2\alpha - (2\sin^2\alpha - 1)$;
в) $2\sin^2\alpha - (2 - 3\cos^2\alpha)$;
г) $3\cos^2\alpha - (2 - 2\sin^2\alpha)$.

**1149.** Упростите выражение:

а) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
б) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;
в) $\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha\cos\alpha - 1$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha\cos\alpha - 1$;
д) $\cos^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
е) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \sin^2\alpha$.

**1150.** Преобразуйте выражение:

а) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$;
б) $\frac{\sin^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha}$;
в) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;
г) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1}$;
д) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} + 1$;
е) $1 + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.

**1151.** Упростите выражение:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$;
б) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;
в) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$;
г) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

**1152.** Преобразуйте выражение:

а) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;
б) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

**1153.** Известно, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

**1154.** Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

**1155.** Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

**1156.** Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

**1157.** Известно, что $360° < \alpha < 450°$. Найдите:

а) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{7}{8}$;

б) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$;

д) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{15}{17}$;

е) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;

з) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$.

**1158.** Выразите

а) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\sin\alpha$;

б) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\cos\alpha$;

в) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$;

г) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$.

**1159.** Выразите выражение

а) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ через $\sin\alpha$;

б) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha$ через $\cos\alpha$;

в) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ через $\operatorname{tg}\alpha$;

г) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ через $\operatorname{ctg}\alpha$.

**1160.** Докажите тождество:

а) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha - (1 + \sin\alpha)(1 - \operatorname{ctg}\alpha)$;

б) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$;

в) $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$;

г) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

**1161.** Существует ли угол $\alpha$, для которого:

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;

б) $\sin\alpha = \frac{5}{7}$ и $\cos\alpha = \frac{4}{7}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}6$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{8}$;

г) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = (-\sqrt{2})$?

**1162.** Зная, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 5$, найдите значение выражения

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

## Упражнения для повторения

**1163.** Решите уравнение:

а) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi) = 0$;

б) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$;

в) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

г) $\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x = 4$.

**1164.** Упростите выражение

$$\frac{(2x - x^2)^{\frac{1}{4}}}{\dfrac{(2 - x)^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{3}{4}}}{2} + \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{2(2 - x)^{\frac{3}{4}}}}.$$

**1165.** Пятьдесят третий член арифметической прогрессии равен 20. Найдите сумму 105 первых членов этой прогрессии.

## 53. Преобразование тригонометрических выражений

Преобразование тригонометрических выражений опирается на определение тригонометрических функций, формулы приведения, основные тригонометрические тождества и др. Они применяются при нахождении значений выражений, упрощении выражений, доказательстве тождеств и в других случаях.

Пример 1. Найдем значение выражения

$$\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}} + \frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Применяя определения тангенса и котангенса и некоторые из основных тригонометрических тождеств, получим

$$\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}} + \frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}} + \frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{\dfrac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 2. Упростим выражение

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

Выполним сложение дробей и применим основные тригонометрические тождества:

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{(1-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)} = \frac{2-2\sin\alpha}{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{2(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)} = \frac{2}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2}{\cos\alpha}$.

Пример 3. Докажем тождество

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta) = (\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha).$$

Преобразуем левую часть тождества:

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta) = \sin^2\alpha-\sin^2\beta =$$
$$= \sin^2\alpha-(1-\cos^2\beta) = \sin^2\alpha+\cos^2\beta-1.$$

Преобразуем правую часть тождества:

$$(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha) =$$
$$= \cos^2\beta-\cos^2\alpha = \cos^2\beta-(1-\sin^2\alpha) = \cos^2\beta+\sin^2\alpha-1.$$

Обе части тождества мы преобразовали в одно и то же выражение. Значит, тождество доказано.

**1166.** Найдите значение выражения:

а) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha - 1$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$;

в) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$;

г) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$.

**1167.** Чему равно значение выражения:

а) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$, если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$?

**1168.** Упростите выражение:

а) $1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$;

б) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} - 1$;

в) $\frac{1}{1 - \cos\alpha} - \frac{1}{1 + \cos\alpha}$;

г) $\frac{1}{1 + \cos\alpha} - \frac{1}{1 - \sin\alpha}$.

**1169.** Преобразуйте выражение:

а) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{ctg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - 1}$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha + 1}$.

**1170.** Упростите выражение:

а) $\frac{\sin\beta}{1 - \cos\beta} + \frac{\sin\beta}{1 + \cos\beta}$;

б) $\frac{\cos\beta}{1 + \sin\beta} + \frac{\cos\beta}{1 - \sin\beta}$;

в) $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha$;

г) $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} - \operatorname{tg}\alpha$.

**1171.** Преобразуйте выражение:

а) $\frac{\sin x + \cos x}{1 + \operatorname{tg} x}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{ctg} x}{\sin x - \cos x}$;

в) $\frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$;

г) $\frac{1 + \operatorname{ctg} x}{\sin x + \cos x}$.

**1172.** Преобразуйте выражение:

а) $\cos^2\alpha + \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$;

б) $\sin^2\varphi + \dfrac{\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}{\operatorname{ctg}^2\varphi + 1}$;

в) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\gamma - 1}{\operatorname{ctg}^2\gamma + 1} - \cos^2\gamma$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - \sin^2 x$.

**1173.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$;

б) $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

в) $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha + \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

**1174.** Докажите тождество:

а) $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^4 x - \cos^4 x$;

б) $(1 + \cos\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha) = 1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$;

в) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 = 4$;

г) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$;

д) $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \sin x + \cos x$;

е) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

**1175.** Докажите, что при всех допустимых значениях $\alpha$ верно равенство:

а) $1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$;

б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \sin\alpha + \cos\alpha$.

**1176.** Докажите, что не зависит от $x$ выражение:

а) $\dfrac{2\sin x\cos x - 1}{(\sin x - \cos x)^2}$;

б) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$.

**1177.** Докажите, что при всех допустимых значениях $\alpha$ принимает одно и то же значение выражение:

а) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$;

б) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

**1178.** Найдите:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$;

б) $\sin^2\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = p$.

**1179.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}}$.

**1180.** Исключите переменную $\alpha$ из системы:

а) $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ y = \sin\alpha\cos\alpha; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha = x, \\ \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = y. \end{cases}$

**1181.** Упростите:

а) $\dfrac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\alpha - \pi);$

б) $\dfrac{\operatorname{tg}(1{,}5 - x) - \cos(\pi - x)\sin(3\pi + x)}{(\cos(3{,}5\pi - x) + \sin(1{,}5\pi + x))^2 - 1}.$

**1182.** Докажите неравенство:

а) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha \leqslant \frac{1}{4};$ б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geqslant \frac{1}{2}.$

**1183.** Решите уравнение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2 x = 0;$ в) $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0;$

б) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1;$ г) $\operatorname{tg}^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$

## Упражнения для повторения

**1184.** Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника составлять геометрическую прогрессию?

**1185.** С помощью каких преобразований можно получить график функции $y = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$ из графика функции $y = \sin x$?

**1186.** Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 3x + 46} + \frac{20}{\sqrt{x^2 + 3x + 46}} = 12.$$

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Докажите формулы приведения для синуса и косинуса угла $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

**2.** Напишите формулы приведения для углов $\pi - \alpha$ и $\pi + \alpha$. Докажите какую-нибудь из этих формул.

**3.** Выведите формулы, выражающие связь между синусом и косинусом, между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же аргумента.

**4.** Решите уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

# § 20. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

## 54. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов

Любую тригонометрическую функцию суммы или разности двух углов можно выразить через тригонометрические функции этих углов. Начнем с косинуса разности углов $\alpha$ и $\beta$. Повернем начальный радиус $OA$ (рис. 138), равный $R$, около точки $O$ на угол $\alpha$ и на угол $\beta$, причем предположим сначала, что каждый из углов $\alpha$ и $\beta$ положителен и меньше $2\pi$, $\alpha > \beta$. Получим радиусы $OB$ и $OC$.

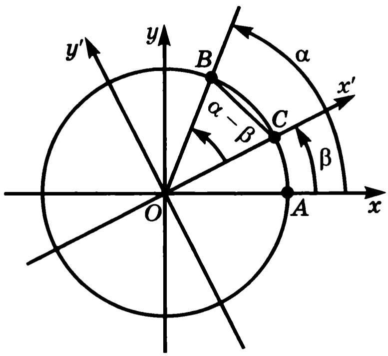



Рис. 138

Обозначим координаты точки $B$ буквами $x_1$ и $y_1$, а координаты точки $C$ — буквами $x_2$ и $y_2$. Пусть $R = 1$. Тогда

$$x_1 = \cos\alpha,\ y_1 = \sin\alpha,\ x_2 = \cos\beta,\ y_2 = \sin\beta.$$

Найдем квадрат расстояния между точками $B$ и $C$:

$$BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 =$$
$$= (\cos^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\beta\cos\alpha) + (\sin^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha) =$$
$$= (\cos^2\beta + \sin^2\beta) + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Повернем оси координат на угол $\beta$. В новом положении радиус $OC$ будет принадлежать оси $Ox'$, а радиус $OB$ составит с осью $Ox'$ угол $\alpha - \beta$.

Пусть в системе координат $x'Oy'$ координаты точек $B$ и $C$ соответственно равны $x_1'$ и $y_1'$, $x_2'$ и $y_2'$, причем $x_1' = \cos(\alpha - \beta)$, $y_1' = \sin(\alpha - \beta)$, $x_2' = 1$, $y_2' = 0$.

Найдем квадрат расстояния между точками $B$ и $C$ в системе координат $x'Oy'$:

$$BC^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_1' - y_2')^2 =$$
$$= (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2 =$$
$$= (1 + \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta)) + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Так как расстояние между двумя данными точками в системах координат $xOy$ и $x'Oy'$ одно и то же, то

$$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Отсюда получаем формулу

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Вывод формулы (1) мы провели в предположении, что углы $\alpha$ и $\beta$ положительны, меньше $2\pi$ и $\alpha > \beta$. Однако доказанная формула будет верна и для произвольных $\alpha$ и $\beta$. Действительно, если к каждому из данных углов прибавить угол, кратный $2\pi$, то это никак не отразится на выводе формулы (1). Несущественным окажется и тот случай, когда $\alpha < \beta$. В этом случае, учитывая четность косинуса, имеем: $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$.

Формулу (1) называют *формулой косинуса разности двух углов*.

Перейдем к выводу *формулы косинуса суммы двух углов*. Сумму $\alpha + \beta$ представим в виде разности $\alpha - (-\beta)$ и воспользуемся формулой (1):

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Значит,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Для вывода *формулы синуса суммы двух углов* используем формулу (1) и формулы приведения:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Получаем

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad (3)$$

С помощью формулы (3) можно получить *формулу синуса разности двух углов*:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Значит,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \tag{4}$$

Выведем *формулы тангенса суммы и тангенса разности двух углов*:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель последней дроби на $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{5}$$

С помощью формулы (5) получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{6}$$

Пример 1. Вычислим $\sin 75°$ и $\cos 75°$.

Представим $75°$ в виде суммы $45°$ и $30°$ и применим формулы (2) и (3):

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2. Вычислим $\operatorname{tg} 15°$.

Представим $15°$ в виде разности $45°$ и $30°$ и воспользуемся формулой (6):

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{9 - 3} = 2 - \sqrt{3}.$$

**1187.** Известно, что $\alpha$ и $\beta$ — углы I четверти и $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{1}{3}$. Найдите:

а) $\sin(\alpha + \beta)$;
б) $\sin(\alpha - \beta)$;
в) $\cos(\alpha + \beta)$;
г) $\cos(\alpha - \beta)$.

**1188.** Используя формулы сложения, найдите значение выражения:
а) $\sin 15°$; б) $\cos 15°$; в) $\sin 105°$.

**1189.** С помощью формул сложения докажите тождество:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$;
б) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$;
в) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha$;
г) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.

**1190.** Выразите через тригонометрические функции угла $\alpha$:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;
б) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;
в) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;
г) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$;
д) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$;
е) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

**1191.** Упростите выражение:
а) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta\cos\alpha$;
б) $\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha + \beta)$;
в) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha\cos\beta$;
г) $\cos\alpha\cos\beta + \sin(\alpha - \beta)$.

**1192.** Найдите значение выражения:
а) $\sin 20°\cos 10° + \cos 20°\sin 10°$;
б) $\cos 50°\cos 5° + \sin 50°\sin 5°$;
в) $\sin 71°\cos 11° - \cos 71°\sin 11°$;
г) $\cos 25°\cos 65° - \sin 25°\sin 65°$.

**1193.** Вычислите:

а) $\cos\frac{8}{15}\pi\cos\frac{1}{5}\pi + \sin\frac{8}{15}\pi\sin\frac{1}{5}\pi$;

б) $\cos\frac{1}{10}\pi\cos\frac{2}{5}\pi + \sin\frac{1}{10}\pi\sin\frac{2}{5}\pi$;

в) $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}$;

г) $\sin\frac{1}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi - \cos\frac{1}{9}\pi\sin\frac{4}{9}\pi$.

**1194.** Упростите выражение:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\frac{1}{2}\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

в) $\sqrt{2}\sin\alpha-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

**1195.** Докажите тождество:

а) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos\beta=\cos\alpha\sin\beta$;

б) $\cos(\alpha-\beta)-\sin(-\alpha)\sin(-\beta)=\cos\alpha\sin\beta$;

в) $\sin(\alpha-\beta)+\cos(-\alpha)\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta$;

г) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(-\alpha)\cos(-\beta)=-\sin\alpha\sin\beta$.

**1196.** Упростите выражение:

а) $\cos 2\varphi\cos 3\varphi+\sin 2\varphi\sin 3\varphi$;

б) $\sin\gamma\cos 2\gamma-\cos\gamma\sin 2\gamma$;

в) $\cos\frac{1}{3}\alpha\cos\frac{2}{3}\alpha-\sin\frac{1}{3}\alpha\sin\frac{2}{3}\alpha$;

г) $\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{3}{2}\gamma+\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{3}{2}\gamma$.

**1197.** Докажите тождество:

а) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$;

б) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$;

в) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

г) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

**1198.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$;

в) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$;

г) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

**1199.** Докажите тождество:

а) $\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\cos\beta\cos(\alpha+\gamma)=\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$;

б) $\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma+\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha=\sin(\alpha-\gamma)\sin\beta$ .

**1200.** Докажите, что если $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — углы треугольника, то:

а) $\sin\alpha=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$;

б) $\cos\alpha=\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma$.

**1201.** Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$. Найдите синус третьего угла треугольника.

**1202.** Косинусы двух углов треугольника равны $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. Найдите косинус третьего угла треугольника.

**1203.** Выразите $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ и $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ через тригонометрические функции углов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.

**1204.** Решите уравнение:

а) $\sin x \cos \frac{\pi}{5} + \cos x \sin \frac{\pi}{5} = 1$;

б) $\cos \frac{\pi}{7} \cos x - \sin \frac{\pi}{7} \sin x = \frac{1}{2}$;

в) $\sin x \cos 25° - \cos x \sin 25° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\cos x \cos 10° + \sin x \sin 10° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**1205.** Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{5}$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; в) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$;
б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$; г) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$.

**1206.** Используя формулы сложения для тангенса, вычислите:
а) $\operatorname{tg} 15°$; б) $\operatorname{tg} 75°$; в) $\operatorname{tg} 105°$.

**1207.** Выразите через тригонометрические функции угла $\alpha$:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$.

**1208.** Упростите выражение:
а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;
б) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta)$.

**1209.** Докажите тождество:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}\beta$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$.

**1210.** Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{24}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{20} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{20}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}$.

**1211.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 25^\circ - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 25^\circ \operatorname{tg}^2 15^\circ}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 1{,}8 - \operatorname{tg}^2 1{,}2}{1 - \operatorname{tg}^2 1{,}8 \operatorname{tg}^2 1{,}2}$.

**1212.** Преобразуйте выражение:

а) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha - 60^\circ)\operatorname{tg}(\alpha - 60^\circ)$;

в) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$;

г) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) + \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$.

**1213.** Выразите $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$.

**1214.** Докажите тождество:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} - \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} + \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} + \dfrac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha} = 0$.

**1215.** Докажите, что если $\alpha$ и $\beta$ — углы I четверти, то:

а) $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$;

б) $\sin(\alpha + \beta) < \cos\alpha + \cos\beta$;

в) $\cos(\alpha - \beta) < \cos\alpha + \sin\beta$;

г) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) > \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

**1216.** Упростите выражение:

а) $(\operatorname{tg}\alpha - 1)\operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} - 1$.

**1217.** Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $\sqrt{3}\cos\beta - \sin\beta$;

б) $\sin\alpha - \cos\alpha$;

в) $\sin\alpha + \cos\alpha$;

г) $\sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta$.

**1218.** Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$;

б) $\operatorname{tg} x - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg} x$.

**1219.** Синусы двух острых углов треугольника равны 0,6 и 0,8. Найдите косинус третьего угла.

### Упражнения для повторения

**1220.** Решите систему

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 7y, \\ 2x^2 + 3y^2 = 5xy. \end{cases}$$

**1221.** Корнями уравнения $x^2 + ax + 2 = 0$ являются числа $x_1$ и $x_2$, а уравнения $x^2 + bx + 32 = 0$ — числа $x_3$ и $x_4$. Найдите $a$ и $b$, если $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ — геометрическая прогрессия.

**1222.** Два плиточника облицевали стену за 4 ч. Первому плиточнику для облицовки $\frac{1}{3}$ стены понадобилось бы на 1 ч больше, чем второму для облицовки $\frac{1}{2}$ стены. За сколько часов каждый из них может облицевать стену?

## 55. Формулы двойного и половинного углов

Выразим $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$ через тригонометрические функции угла $\alpha$. Применив к этим выражениям формулы сложения, получим:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Значит,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (1)$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (2)$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Формулы (1) — (3) называют *формулами двойного угла.*

Пример 1. Вычислим значение $\sin 2\alpha$, если известно, что $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ и $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Найдем значение $\cos\alpha$:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha,$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Так как $\alpha$ — угол третьей четверти, то $\cos\alpha < 0$. Значит,

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5}.$$

Подставим значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в формулу (1), получим

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}.$$

Выразим $1 - \cos\alpha$ и $1 + \cos\alpha$ через тригонометрические функции угла $\frac{\alpha}{2}$.

Применив формулу (2), получим:

$$1 - \cos\alpha = 1 - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$1 + \cos\alpha = 1 + \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Значит,

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (5)$$

Формулы (4) и (5) находят широкое применение в преобразованиях тригонометрических выражений.

Пример 2. Упростим выражение $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Используя формулы (4) и (5), получим

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Выразим $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции угла $\alpha$.

С помощью формул (4) и (5) найдем:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha, \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (6)$$

Если $\frac{\alpha}{2}$ — угол первой или второй четверти, то

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Если $\frac{\alpha}{2}$ — угол третьей или четвертой четверти, то

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha, \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (7)$$

Если $\frac{\alpha}{2}$ — угол первой или четвертой четверти, то

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Если $\frac{\alpha}{2}$ — угол второй или третьей четверти, то

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Возьмем тождество

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби, составляющей правую часть, на $2\cos\frac{\alpha}{2}$. Затем применим формулы (1) и (5). Получим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (8)$$

Формулы (6) — (8) называют *формулами половинного угла.*

Выразим $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Используя формулы двойного угла, получим:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

**1223.** Выразите $\mathrm{ctg}\,2\alpha$

а) через $\mathrm{tg}\,\alpha$; б) через $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

**1224.** Найдите значение $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\mathrm{tg}\,2\alpha$, если $\frac{\alpha}{2} < \alpha < \pi$ и $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

**1225.** Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\mathrm{tg}\,2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}4$ и $\pi < \alpha < < \frac{3}{2}\pi$.

**1226.** Найдите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$.

**1227.** Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 2x}{2\cos x}$; в) $\cos^2 x - \cos 2x$;

б) $\frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; г) $\mathrm{tg}\,2\alpha(1-\mathrm{tg}^2\alpha)$.

**1228.** Преобразуйте выражение:

а) $\frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$; г) $\frac{(\sin x - \cos x)^2}{1-\sin 2x}$;

б) $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$; д) $\frac{\cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha}{2\sin\alpha}$;

в) $\frac{\cos\alpha - \sin 2\alpha}{1-2\sin\alpha}$; е) $\frac{2\cos x\cos 2x}{\mathrm{ctg}\,2x}$.

**1229.** Найдите значение выражения:

а) $2\sin 15°\cos 15°$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;

в) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$;

г) $\dfrac{2\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$;

д) $4\sin 15°\cos 15°\cos 30°$;

е) $\cos^2 15°-\cos^2 75°$.

**1230.** Упростите выражение:

а) $1-2\sin^2\alpha$;

б) $2\cos^2\alpha-1$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$;

г) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

**1231.** Преобразуйте выражение:

а) $\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$;

б) $\dfrac{\cos\beta}{\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}}$;

в) $\dfrac{\cos^2 2\alpha}{\sin 4\alpha}$;

г) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1-\sin^2 2\alpha}$.

**1232.** Докажите тождество:

а) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$;

б) $\sin 2\beta-\operatorname{tg}\beta=\cos 2\beta\operatorname{tg}\beta$;

в) $\operatorname{ctg}\varphi-\sin 2\varphi=\operatorname{ctg}\varphi\cos 2\varphi$;

г) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

**1233.** Упростите выражение:

а) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$;

б) $\cos\alpha(\cos\alpha+\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha+\sin\beta)$;

в) $\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$;

г) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\operatorname{tg}2\alpha$.

**1234.** Преобразуйте выражение:

а) $4\sin^2 1°\cos^2 1°-\cos^2 2°$;

б) $16\sin^2 3°\cos^2 3°\cos^2 6°$;

в) $(\sin 10°+\sin 80°)(\cos 80°-\cos 10°)$;

г) $(\cos 5°+\cos 95°)(\sin 85°+\sin 175°)$.

**1235.** Выразите $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

**1236.** Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**1237.** Вычислите значения $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \frac{14}{50}$ и $\frac{\alpha}{2} < \alpha < \pi$.

**1238.** Используя формулы половинного угла, найдите значения синуса, косинуса и тангенса угла $22°30'$.

**1239.** Докажите, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

**1240.** Докажите тождество:

а) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$; б) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

**1241.** Существует ли значение $\alpha$, при котором:

а) $\sin\alpha\cos\alpha = \sin 40°$; б) $\frac{1}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos 50°$?

**1242.** Докажите, что:

а) $\sin 10° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{8}$; б) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{4}$.

**1243.** Докажите неравенство:

а) $\sin 2x < 2\sin x$, если $0 < x < \pi$;

б) $\sin 2x < 2\cos x$, если $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

**1244.** Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $\cos 2x + 3\sin^2 x$; б) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

**1245.** Решите уравнение:

а) $1 - \cos x = \sin\frac{x}{2}$; в) $1 - \sin x = \cos x$;

б) $1 + \cos x = \cos\frac{x}{2}$; г) $\cos^2 x - \cos x = \sin x - \sin^2 x$.

### Упражнения для повторения

**1246.** Решите уравнение

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

**1247.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha$.

**1248.** Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{3}{2}xy, \\ x^2 + xy = -3y. \end{cases}$$

## 56. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Представим сумму $\sin\alpha + \sin\beta$ в виде произведения тригонометрических функций. Для любых значений $\alpha$ и $\beta$ можно найти такие углы $x$ и $y$, что будут выполняться равенства $\alpha = x + y$ и $\beta = x - y$. Подставим выражения $x + y$ и $x - y$ в сумму $\sin\alpha + \sin\beta$ вместо $\alpha$ и $\beta$ и применим формулы сложения:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) =$$
$$= \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y.$$

Сложим и вычтем почленно равенства $\alpha = x + y$ и $\beta = x - y$:

$$\alpha + \beta = 2x, \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2};$$
$$\alpha - \beta = 2y, \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Значит,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют *формулой суммы синусов двух углов*.

Аналогично можно вывести *формулы разности синусов* и *формулы суммы и разности косинусов двух углов*:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}. \qquad (4)$$

Пример 1. Упростим выражение $\sin 70° + \sin 20°$.

Применяя формулу синуса суммы двух углов, получим

$$\sin 70° + \sin 20° = 2\sin\frac{70° + 20°}{2}\cos\frac{70° - 20°}{2} =$$

$$= 2\sin 45° \cos 25° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25° = \sqrt{2}\cos 25°.$$

Пример 2. Представим в виде произведения $1 - \sin\alpha$.

Так как $1 = \sin\frac{\pi}{2}$, то, применяя формулу разности синусов, получим

$$1 - \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\alpha = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2} =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Пример 3. Представим в виде произведения выражение $\sqrt{3} - 2\cos\alpha$.

Вынесем за скобки множитель 2, заменим число $\frac{\sqrt{3}}{2}$ равным ему числом $\cos 30°$ и применим формулу разности косинусов:

$$\sqrt{3} - 2\cos\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\alpha\right) = 2(\cos 30° - \cos\alpha) =$$

$$= -2\cdot 2\sin\frac{30° + \alpha}{2}\sin\frac{30° - \alpha}{2} = -4\sin\left(15° + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Используя формулы синуса и косинуса суммы и разности двух углов, можно вывести формулы:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}, \qquad (5)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}, \qquad (6)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}. \qquad (7)$$

Формулу (5) можно получить, если сложить почленно левые и правые части тождеств

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

и выразить $\cos\alpha\cos\beta$ через $\cos(\alpha - \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$.

Аналогично выводятся формулы (6) и (7).

**1249.** Докажите тождество:

а) $\sin(\alpha - 30°) - \sin(\alpha + 30°) = -\cos\alpha$;
б) $\cos(\alpha + 60°) + \cos(\alpha - 60°) = \cos\alpha$.

**1250.** Представьте в виде произведения:

а) $\sin 25° + \sin 35°$; д) $\sin 3 + \sin 1$;
б) $\sin 130° - \sin 10°$; е) $\sin 2 - \sin 5$;
в) $\cos 80° + \cos 20°$; ж) $\cos 4 + \cos 7$;
г) $\cos 18° - \cos 78°$; з) $\cos 3 - \cos 2$.

**1251.** Преобразуйте в произведение:

а) $\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{3\pi}{5}$; д) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;

б) $\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

в) $\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}$; ж) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right)$;

г) $\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}$; з) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right)$.

**1252.** Представьте в виде произведения:

а) $\cos x + \sin y$; г) $\cos\alpha - \sin\alpha$; ж) $\sin 2\alpha - \cos\alpha$;
б) $\sin x - \cos y$; д) $\cos 3\alpha - \sin\alpha$; з) $\cos\alpha + \sin 2\alpha$.
в) $\sin\alpha + \cos\alpha$; е) $\sin\alpha + \cos 3\alpha$;

**1253.** Преобразуйте в произведение:

а) $\sin\alpha + \frac{1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\alpha$;

б) $\frac{1}{2} - \sin\alpha$; е) $\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha$; ж) $\cos\alpha + \frac{1}{2}$;

г) $\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{1}{2} - \cos\alpha$.

**1254.** Представьте в виде произведения:

а) $1 + 2\cos x$;
б) $\sqrt{3} - 2\sin x$;
в) $2\sin x + \sqrt{2}$;
г) $2\cos x - \sqrt{2}$;
д) $\sqrt{3} + 2\cos x$;
е) $2\sin x - \sqrt{2}$.

**1255.** Преобразуйте в произведение:

а) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$;
б) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$;
в) $\frac{3}{4} - \sin^2 x$;
г) $\cos^2 x - \frac{1}{2}$.

**1256.** Представьте в виде суммы или разности:

а) $2\sin 27^\circ \cos 9^\circ$;
б) $-2\sin 25^\circ \sin 15^\circ$;
в) $2\sin\alpha\cos 3\alpha$;
г) $2\cos 2\alpha\cos\alpha$;
д) $\cos(x + 1)\cos(x - 1)$;
е) $2\sin(a + b)\cos(a - b)$;
ж) $\sin(m + n)\sin(m - n)$;
з) $\sin(2x + 3)\sin(x - 3)$.

**1257.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 37^\circ + \sin 23^\circ}{\sin 37^\circ - \sin 23^\circ}$;
б) $\dfrac{\cos 20^\circ - \cos 140^\circ}{\cos 20^\circ + \cos 140^\circ}$;
в) $\dfrac{\sin 55^\circ - \sin 35^\circ}{\cos 55^\circ + \cos 23^\circ}$;
г) $\dfrac{\cos 25^\circ - \cos 85^\circ}{\sin 25^\circ + \sin 85^\circ}$;
д) $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$;
е) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$;
ж) $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)}$;
з) $\dfrac{\cos(45^\circ - \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha) + \sin(45^\circ + \alpha)}$.

**1258.** Преобразуйте выражение:

а) $\dfrac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos 2x - \cos 6x}$;
б) $\dfrac{\cos 5x - \cos x}{\sin 5x + \sin x}$;
в) $\dfrac{\cos 2x + \cos 3x}{\sin 2x - \sin 3x}$;
г) $\dfrac{\sin 2x - \sin x}{\cos 2x + \cos x}$.

**1259.** Докажите тождество:

а) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2}$;

б) $\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y) = \sin 2x \sin 2y$;

в) $\cos^2(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha - \beta) = -\sin 2\alpha \sin 2\beta$;

г) $(\sin x - \sin y)^2 - (\cos x - \cos y)^2 = 4\sin^2\frac{x - y}{2}$;

д) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

е) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x\cos 2x\sin 4x$.

**1260.** Решите уравнение:

а) $\sin 2x + \sin x = 0$;

б) $\sin 3x - \sin 2x = 0$;

в) $\cos 3x + \cos x = 0$;

г) $\cos x - \cos 2x = 0$.

**1261.** Докажите, что:

а) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

б) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

**1262.** Преобразуйте выражение:

а) $\operatorname{tg} 75° - \operatorname{tg} 15°$;

б) $\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 65°$;

в) $\operatorname{ctg} 50° - \operatorname{ctg} 20°$;

г) $\operatorname{ctg} 11° + \operatorname{ctg} 34°$;

д) $\operatorname{tg} 85° + \operatorname{ctg} 85°$;

е) $\operatorname{tg} 25° - \operatorname{ctg} 75°$.

**1263.** Докажите, что:

а) $\cos 75° \cdot \cos 15° = \dfrac{1}{4}$;

б) $\sin 105° \cdot \sin 75° = -\dfrac{1}{4}$.

**1264.** Найдите основной период функции:

а) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

б) $y = \dfrac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$;

в) $y = \cos x - \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}$;

г) $y = \sin^2 x$.

## Упражнения для повторения

**1265.** Упростите выражение:

а) $\sin(\pi + x)\sin(4\pi + x) - \cos 2x$;

б) $\sin(2\alpha - \pi) + 4\sin\alpha\cos\alpha$.

**1266.** Покажите штриховкой в координатной плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} y - \cos x \geqslant 0, \\ y + x^2 \leqslant 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \geqslant 2\sin x, \\ y \leqslant -2\sin x. \end{cases}$

**1267.** Решите неравенство

$$\sqrt{7x - 3} \leqslant \sqrt{8 - 4x}.$$

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Выведите формулу косинуса разности двух углов.

**2.** Сделайте вывод формул косинуса суммы и синуса суммы и разности двух углов.

**3.** Выведите формулы тангенса суммы и разности двух углов.

**4.** Выведите формулы синуса, косинуса и тангенса двойного угла.

**5.** Выразите $1 - \cos\alpha$ и $1 + \cos\alpha$ через тригонометрические функции угла $\frac{\alpha}{2}$.

**6.** Выведите формулы синуса, косинуса и тангенса половинного угла.

**7.** Выведите формулы суммы и разности синусов, суммы и разности косинусов и суммы и разности тангенсов двух углов.

## Дополнительные упражнения к главе 6

### К параграфу 17

**1268.** Найдите значение выражения:

а) $\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;  в) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cos\pi\sin\frac{\pi}{4}$;  г) $\operatorname{tg} 60^\circ - 4\cos 45^\circ \sin 45^\circ$.

**1269.** Чему равно значение выражения:
а) $\sin 2\alpha + \cos 3\alpha - \sin\alpha + \cos\alpha$ при $\alpha = 30^\circ$;
б) $\cos\alpha - 2\sin\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha = 45^\circ$;
в) $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(3\alpha - 60^\circ) - 2\cos(120^\circ - 2\alpha)$ при $\alpha = 30^\circ$;
г) $\cos(150^\circ - \alpha) + 2\sin(180^\circ - 2\alpha) - 3\cos(90^\circ - \alpha)$ при $\alpha = 60^\circ$?

**1270.** Найдите значение выражения:
а) $\sin^2(100^\circ - \alpha) + \cos^2(100^\circ - \alpha)$ при $\alpha = 55^\circ$;
б) $\operatorname{tg}^2\alpha\sin(\alpha + 15^\circ)\operatorname{tg}^2(\alpha + 15^\circ) - \cos(\alpha - 15^\circ)$ при $\alpha = 45^\circ$;
в) $\operatorname{ctg}^2(65^\circ - \alpha) - \operatorname{tg}^2(\alpha + 25^\circ) + \frac{3}{4}\operatorname{tg}^2(\alpha + 10^\circ) + \cos^2(\alpha + 10^\circ)$ при $\alpha = 20^\circ$;
г) $\cos(\alpha - 10^\circ) - \sin^2(\alpha + 20^\circ) + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2(\alpha + 10^\circ)$ при $\alpha = 70^\circ$.

**1271.** Верно ли равенство или неравенство:

а) $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = 1$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

г) $2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4} < \cos\frac{\pi}{4}$?

**1272.** В каких четвертях положительно и в каких — отрицательно значение выражения:

а) $\sin\alpha\cos\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$;

в) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

г) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

д) $\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

е) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

**1273.** При каких значениях $\alpha$ верно равенство:

а) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$;

б) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$;

в) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$;

г) $|\operatorname{ctg}\alpha| = -\operatorname{ctg}\alpha$;

д) $|\sin\alpha\cos\alpha| = \sin\alpha\cos\alpha$;

е) $|\sin\alpha\cos\alpha| = -\sin\alpha\cos\alpha$?

**1274.** Упростите выражение:

а) $m^2\cos 0 + \dfrac{mn}{\sin\frac{\pi}{6}} + n^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

б) $x^2\sin\frac{\pi}{2} + 2xy\cos\pi - y^2\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

**1275.** Докажите, что:

а) $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$ при $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

## К параграфу 18

**1276.** Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg} 553°$;

б) $\cos 745°$;

в) $\sin 442°$;

г) $\operatorname{ctg}(-525°)$;

д) $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{5}$;

е) $\cos\left(-\frac{41\pi}{7}\right)$.

**1277.** Чему равно значение выражения:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$?

**1278.** Найдите нули тригонометрических функций в промежутке:

а) $[-360°; 180°]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right)$; д) $(-350°; 350°)$;

б) $(-180°; 370°)$; г) $(0; 4\pi]$; е) $\left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

**1279.** Найдите в промежутке $[-180°; 270°]$ корни уравнения:
а) $\sin x = 0$; в) $\operatorname{tg} x = 0$;
б) $\cos x = 0$; г) $\operatorname{ctg} x = 0$.

**1280.** Сравните с нулем значение выражения:
а) $\sin 300°$; д) $\sin 155°$; и) $\cos 2{,}3\pi \operatorname{tg} 0{,}8\pi$;
б) $\cos 320°$; е) $\cos 260°$; к) $\operatorname{ctg} 2{,}1\pi \sin 3{,}4\pi$;
в) $\operatorname{tg} 201°$; ж) $\operatorname{tg} 130°$; л) $\sin 1{,}2\pi \operatorname{tg} 3{,}4\pi$;
г) $\operatorname{ctg} 105°$; з) $\operatorname{ctg} 190°$; м) $\operatorname{tg} 1{,}7\pi \sin 1{,}7\pi$.

**1281.** Углом какой четверти является угол $\alpha$, если:
а) $\sin\alpha\cos\alpha > 0$; г) $\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha < 0$;
б) $\sin\alpha\cos\alpha < 0$; д) $\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha > 0$;
в) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha > 0$; е) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha < 0$?

**1282.** Найдите по графику (см. рис. 128 на с. 317) значения $x$ в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, при которых:
а) $\sin x = 0{,}6$; в) $\sin x = -1$;
б) $\sin x = -0{,}4$; г) $\sin x = 1$.

**1283.** Постройте в промежутке $[-2\pi; 2\pi]$ график функции:
а) $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

## К параграфу 19

**1284.** Выразите через тригонометрическую функцию угла $\alpha$:

а) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; д) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$;

б) $\cos\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)$; е) $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$;

в) $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)$; ж) $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$;

г) $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi)$; з) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.

**1285.** При каком значении $x$ в промежутке

а) $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ верно равенство $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ верно равенство $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\left(\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right)$ верно равенство $\cos x = -\frac{1}{2}$;

г) $\left(\frac{3}{2}\pi;\ 2\pi\right)$ верно равенство $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$?

**1286.** Найдите такое значение $x$ в промежутке

а) $\left(\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right)$, при котором $\sin x = -\sin 23°$;

б) $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, при котором $\cos x = -\cos 85°$;

в) $\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, при котором $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 40°$;

г) $\left(\frac{3}{2}\pi;\ 2\pi\right)$, при котором $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} 10°$.

**1287.** Упростите выражение:

а) $\cos 13° - \sin 77° + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{ctg} 130°$;

б) $\sin(-69°) + \sin(-52°) + \cos 21° + \cos(-38°)$;

в) $\sin(90° + \alpha) + \operatorname{tg}(270° + \alpha) + \cos(\alpha - 180°) + \operatorname{ctg}(360° - \alpha)$;

г) $3\cos\alpha - \sin(\alpha - 30°) - 3\cos(360° - \alpha) + \sin(\alpha + 90°)$;

д) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \cos(\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

е) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin(\alpha - \pi)$.

**1288.** Существует ли угол $\alpha$, для которого:

а) $\sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ и $\cos\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha = m + \frac{1}{m}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{m}{m^2 + 1}$?

**1289.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha}$;

б) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

в) $1 + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha$;

г) $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

**1290.** Докажите тождество:

а) $\dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$;

б) $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$;

в) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

**1291.** Известно, что $\sin\alpha - \cos\alpha = m$. Найдите:
а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$.

**1292.** Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ и $\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha$, если

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = n.$$

**1293.** Докажите, что дробь $\dfrac{\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$ не может принимать отрицательных значений.

**1294.** Значение дроби $\dfrac{\sin^3\alpha\,(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ не зависит от $\alpha$. Докажите.

**1295.** Тангенс угла при одном из оснований равнобокой трапеции равен 0,8. Найдите тангенс, котангенс, синус и косинус угла при другом основании трапеции.

**1296.** Котангенс одного из смежных углов равен −3. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс другого угла.

**1297.** Найдите значение выражения:
а) $\operatorname{tg} 10° \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 30° \operatorname{tg} 40° \operatorname{tg} 50° \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 80°$;
б) $\operatorname{ctg} 30° \operatorname{ctg} 35° \operatorname{ctg} 40° \operatorname{ctg} 45° \operatorname{ctg} 50° \operatorname{ctg} 55° \operatorname{ctg} 60°$;
в) $\sin^2 20° + \sin^2 30° + \sin^2 40° + \sin^2 50° + \sin^2 60° + \sin^2 70°$;
г) $\cos^2 21° + \cos^2 33° + \cos^2 45° + \cos^2 57° + \cos^2 69°$.

**1298.** Докажите, что произведение всех выражений вида $\operatorname{tg} n°$, где $n$ — натуральное число, меньшее 90, равно 1.

**1299.** Упростите выражение:
а) $\sin(-220°)\cos 50° + \cos 220° \sin(-50°) + \operatorname{tg}(-40°)\operatorname{tg} 50°$;
б) $\operatorname{ctg} 245° \operatorname{ctg} 205° (\sin 265° \cos 175° + \sin 5° \cos 95°)$.

**1300.** Докажите, что $\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right) = 1$.

## К параграфу 20

**1301.** Найдите:

а) $\sin(30° + \alpha)$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$ и $180° < \alpha < 270°$;

б) $\cos(\alpha - 45°)$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ и $0° < \alpha < 90°$;

в) $\sin(60° - \alpha)$, если $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $90° < \alpha < 180°$;

г) $\operatorname{tg}(\alpha + 45°)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $90° < \alpha < 180°$.

**1302.** Известно, что $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $0° < \alpha < 90°$, $90° < \beta < 180°$. Найдите:
а) $\sin(\alpha + \beta)$; в) $\cos(\alpha - \beta)$;
б) $\cos(\alpha + \beta)$; г) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;

**1303.** Найдите:

а) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = m$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = n$.

**1304.** Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}5$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

**1305.** Упростите:

а) $\cos\alpha\sin(30° + \alpha) - \sin\alpha\cos(30° + \alpha)$;

б) $\cos(45° - \alpha)\sin\alpha + \sin(45° - \alpha)$;

в) $\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)\sin\alpha$;

г) $\cos(\alpha - \beta)\sin\beta + \sin(\alpha - \beta)\cos\beta$.

**1306.** Докажите тождество:

а) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}\beta$;

б) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;

в) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = 2$.

**1307.** Выразите

а) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$ через $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha - \beta)$;

в) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$ через $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$;

г) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$ через $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$.

**1308.** Докажите, что $\alpha + \beta = 45°$, если $\alpha$ и $\beta$ — острые углы и

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$.

**1309.** Докажите, что $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$, если $\alpha$ и $\beta$ — острые углы и

$\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$.

**1310.** Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{22}}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha = -1\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

**1311.** Докажите, что $\frac{1}{2}\sin 2\alpha \leqslant \sin\alpha$, если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

**1312.** Выразите $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$ и $\operatorname{tg} 2\varphi$ через $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

**1313.** Найдите значение $\cos 4\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

**1314.** Выразите:

а) $\sin 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;
б) $\cos 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;
в) $\operatorname{tg} 4\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$;
г) $\operatorname{ctg} 4\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$.

**1315.** Докажите тождество:

а) $\sin 2\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

б) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

в) $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$;

г) $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$.

**1316.** Выразите $\sin 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

**1317.** Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin\alpha = 0{,}28$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

**1318.** Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

**1319.** Докажите тождество:

а) $\cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta) + \sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) = 2\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

б) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

**1320.** Представьте в виде произведения:

а) $1 - \cos^2 x - \cos^2 y$;
б) $1 - \sin^2 x - \cos^2 y$;
в) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$;
г) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha$.

**1321.** Преобразуйте в произведение:

а) $\sin(30° - \alpha) + \sin(30° + \alpha) + \cos 3\alpha$;

б) $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha) + \sqrt{2}\cos 3\alpha$.

**1322.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta}$;
б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha - \cos\beta}$.

**1323.** Докажите, что при любых значениях $\alpha$ и $\beta$ верно равенство:

а) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
б) $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

**1324.** Представьте в виде произведения:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;
б) $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;
в) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$;
г) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

**1325.** Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

б) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$.

**1326.** Найдите $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha + \sin\beta = m$ и $\cos\alpha + \cos\beta = q$.

**1327.** Если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$. Докажите.

**1328.** Найдите значение выражения

$$8\cos 20°\cos 40°\cos 80°.$$

**1329.** Упростите выражение

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha}}} \quad \text{при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

**1330.** Докажите тождество:

а) $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos 2n\alpha = \dfrac{\sin n\alpha \cos (n+1)\alpha}{\sin \alpha}$, где $n$ — натуральное число;

б) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \ldots + \sin 2n\alpha = \dfrac{\sin n\alpha \sin (n+1)\alpha}{\sin \alpha}$, где $n$ — натуральное число.

**1331.** Докажите, что если $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = 4\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{3\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}.$$

**1332.** Докажите, что если в треугольнике с углами $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ угол $\gamma$ тупой, то произведение тангенсов $\alpha$ и $\beta$ меньше 1.

**1333.** Докажите, что наибольшее значение $\sin x + \sqrt{2}\cos x$ равно $\sqrt{3}$.

**1334.** Докажите, что $\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \ldots \cos^k \alpha = \dfrac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}$, где $k$ — натуральное число.

**1335.** Докажите, что уравнение $\sin^4 x - \sin^2 x + \sin x - 3 = 0$ не имеет корней.

**1336.** Докажите, что:

а) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$;

б) $\cos\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{2}$.

# ГЛАВА 7. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## § 21. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

### 57. Перестановки

На практике часто приходится решать задачи, в которых надо составить ту или иную комбинацию элементов согласно поставленному в условии задачи требованию, а также производить подсчет числа составленных комбинаций. Такие задачи получили название *комбинаторные*, а раздел математики, в котором изучаются комбинаторные задачи, — *комбинаторика*.

Идеи и методы комбинаторики используются в теории вероятностей, математической статистике, а также в других разделах науки и техники.

Простейшей комбинацией, которую можно составить из элементов конечного множества, установив в этом множестве порядок его элементов, является *перестановка*.

Рассмотрим задачу.

На полке стоят три книги. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке?

Обозначим книги буквами $a$, $b$, и $c$.

Если первой поставить книгу $a$, то возможны варианты

$$abc,\ acb.$$

Если первой поставить книгу $b$, то имеем такие варианты:

$$bac,\ bca.$$

И, наконец, если первой будет книга $c$, то получим такие варианты:

$$cab,\ cba.$$

Значит, три книги на полке можно расставить шестью различными способами, или, как говорят в комбинаторике, можно получить 6 различных *перестановок*.

Определение. **Конечное множество, в котором установлен порядок его элементов, называют перестановкой.**

Выясним, сколько перестановок можно получить из множества, содержащего $n$ элементов.

Обозначим число перестановок из $n$ элементов символом $P_n$ (читают: «пэ из эн»).

Если $n = 1$, то $P_1 = 1$. Это очевидно.

Если $n = 2$, то $P_2 = 2$, так как возможны лишь две перестановки: $ab$ и $ba$.

Если $n = 3$, то $P_3 = 6$. Этот случай рассмотрен выше.

Пусть $n = 4$. Добавим к трем книгам $a$, $b$ и $c$ еще одну — книгу $d$.

Из каждой перестановки, например $abc$, можно получить 4 различных перестановки, если книгу $d$ поставить перед $a$, перед $b$, перед $c$, после $c$:

$$dabc,\ adbc,\ abdc,\ abcd.$$

Всего перестановок из 3 элементов будет 6. Значит,

$$P_4 = 4P_3 = 4 \cdot 6 = 24.$$

Из рассмотренных примеров видно, что

$$P_1 = 1,\ P_2 = 1 \cdot 2,\ P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,\ P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Можно предположить, что число перестановок из $n$ элементов можно найти по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1)n.$$

Произведение первых $n$ натуральных чисел принято обозначать так: $n!$ (читают: «эн факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1)n$. По определению также считают, что $1! = 1$.

Докажем, что для любого $n \in N$ верна формула

$$P_n = n! \tag{1}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

При $n = 1$ формула (1) верна: $P_1 = 1$, т. е. $P_1 = 1!$

Допустим, что формула (1) верна для $n = k$, где $k > 1$, т. е. $P_k = k!$ Докажем, что формула (1) также верна для $n = k + 1$, т. е. $P_{k+1} = (k + 1)!$

Пусть $a_1a_2a_3 \ldots a_k$ — произвольная перестановка, которую можно составить из $k$ элементов. Если к этой перестановке присоединить $a_{k+1}$ элемент, то его можно поставить на первое место, на второе место и т. д., на $k$-е место и, наконец, на последнее место (после $a_k$ элемента).

В результате из одной перестановки можно получить $k + 1$ перестановку, а из $P_k$ перестановок — $(k + 1)P_k$ перестановок. Значит, $P_{k+1} = (k + 1)P_k = (k + 1)k! = (k + 1)!$

Мы показали, что формула (1) верна для $n = 1$, и, допустив, что она верна для $n = k$, доказали, что она верна для $n = k + 1$. Следовательно, на основании принципа математической индукции формула (1) верна для любого $n \geqslant 1$.

Пример 1. Найдем, сколько различных четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 0, 1, 2, 3, причем в каждом числе цифры должны быть разные.

Количество четырехзначных чисел, которые можно составить из четырех различных цифр, исключая 0, без повторения цифр, равно числу перестановок из четырех элементов, т. е. $P_4$. Однако в этом случае среди цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться четырехзначное число. Поэтому из перестановок, содержащих четыре элемента, надо исключить те перестановки, которые начинаются цифрой 0. Таких перестановок будет $P_3$. Следовательно, всего четырехзначных чисел, которые можно составить из данных цифр, будет

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 3!(4 - 1) = 6 \cdot 3 = 18.$$

Ответ: 18.

Пример 2. Имеется 10 различных книг, среди которых есть трехтомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, если книги трехтомника должны находиться вместе, но в любом порядке?

Будем считать трехтомник одной книгой. Тогда у нас имеется не 10 книг, а 8. Расставить их можно $P_8$ различными способами. В то же время книги в трехтомнике можно расставить $P_3$ способами, каждой перестановке из 8 элементов соответствует определенная перестановка из 3 элементов. Поэтому всего перестановок в соответствии с условием задачи будет

$$P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 241\,920.$$

Ответ: 241 920.

**1337.** Сколькими различными способами могут сесть на скамейку

а) 5 человек; б) 7 человек?

**1338.** Сколько различных трехцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, используя красный, синий и белый цвета?

**1339.** Сколькими способами можно расставить по этапам четырех участниц эстафеты в беге $4 \times 100$ м?

**1340.** Составьте всевозможные трехзначные числа, в которых все цифры разные, используя лишь цифры:

а) 7, 5, 1; б) 2, 0, 9.

**1341.** Сколько четных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 7, если каждая цифра может быть использована только один раз?

**1342.** Учащиеся должны посетить во вторник по расписанию 5 уроков по следующим предметам: литература, алгебра, география, физкультура и биология. Сколькими способами можно составить расписание на этот день так, чтобы физкультура была пятым уроком?

**1343.** Из цифр 2, 3, 4, 7 составлены всевозможные четырехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди этих чисел таких, которые:
а) начинаются с цифры 7; б) не начинаются с цифры 4?

**1344.** Из цифр 1, 2, 0, 5, 6 составлены всевозможные пятизначные числа (без повторения цифр). Сколько среди этих чисел таких, которые:
а) кратны 4; б) кратны 5?

**1345.** В автомашине 5 мест. Сколькими способами в этой автомашине могут разместиться 5 человек, если место водителя могут занять только двое из них (т. е. только двое могут управлять автомобилем)?

**1346.** Чтобы открыть сейф, нужно набрать шифр, содержащий определенную последовательность из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, и другой шифр, содержащий последовательность из букв $a$, $b$, $c$, $d$, в которых буквы и цифры не повторяются. Сколько существует комбинаций, при которых сейф не открывается?

**1347.** Сколькими способами можно расставить на полке четыре книги по алгебре и три по геометрии, причем так, чтобы все книги по алгебре (в любом порядке) стояли рядом?

**1348.** Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 4, 6, не повторяя цифр?

**1349.** Число $a = n! + 1$, где $n \in N$, является квадратом натурального числа. Найдите наименьшее значение $a$, если:
а) $a$ — двузначное число; б) $a$ — трехзначное число.

**1350.** Решите уравнение:
а) $x! = 5040$; б) $x! + (x - 1)! = 5760$.

### Упражнения для повторения

**1351.** Постройте график функции
$$y = 2x^2 - 3|x| - 2.$$

**1352.** При каких значениях параметра $a$ уравнение
$$x^4 + ax^2 + a - 1 = 0$$
имеет только два корня?

**1353.** Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} < 1.$$

**1354.** Докажите, что значение выражения

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

есть натуральное число.

## 58. Размещения

Составим из элементов множества $\{a, b, c, d\}$ всевозможные пары, чтобы в каждой паре элементы не повторялись.

В первой строке запишем все пары с первым элементом $a$, во второй — все пары с первым элементом $b$ и т. д. Получим таблицу:

$$\begin{array}{lll} (a, b), & (a, c), & (a, d), \\ (b, a), & (b, c), & (b, d), \\ (c, a), & (c, b), & (c, d), \\ (d, a), & (d, b), & (d, c). \end{array}$$

Каждую пару в этой таблице, составленную из элементов множества $\{a, b, c, d\}$, в комбинаторике называют *размещением* из 4 элементов по 2. Число всех таких размещений обозначают так: $A_4^2$ (читают: «а из четырех по два»). Мы видим, что $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

О п р е д е л е н и е. **Размещением из $n$ элементов конечного множества по $k$, где $k \leqslant n$, называют упорядоченное множество, содержащее $k$ элементов.**

Таким образом, размещения — это пары, тройки, четверки и т. д. элементов множества. Из определения следует, что два размещения являются различными, если они отличаются друг от друга элементами или порядком элементов. Легко видеть, что размещение из $n$ элементов по $n$ — это перестановка из $n$ элементов.

Символом $A_n^k$ обозначается число всевозможных размещений, которые можно составить из $n$ элементов по $k$.

Т е о р е м а. ***Число размещений, составленных из n элементов по k, вычисляется по формуле***

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)),$$

***т. е. равно произведению k последовательных натуральных чисел, большим из которых является n.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть имеется множество, состоящее из $n$ элементов:

$$\{a, b, c, \ldots, k, l\}.$$

Мы не знаем, сколько всего можно составить размещений из этих $n$ элементов по $k$, но знаем, что среди всех размещений есть такие, которые начинаются элементом $a$. Поставим себе задачу сосчитать, сколько размещений из $n$ по $k$ начинаются элементом $a$.

Пусть

$$\underbrace{(a, \ldots)}_{k \text{ элементов}} \quad —$$

одно из таких размещений. В таком размещении $k - 1$ элементов, следующих после $a$, представляют собой некоторое размещение из $n - 1$ элементов по $k - 1$. Действительно, в это размещение могут входить любые из данных $n$ элементов, кроме элемента $a$. Поэтому размещений из $n$ элементов по $k$, начинающихся элементом $a$, столько, сколько можно составить размещений из $n - 1$ элементов по $k - 1$.

Каждое из размещений из $n$ по $k$ начинается либо элементом $a$, либо элементом $b$ и т. д.

Число размещений, начинающихся элементом $a$, равно $A_{n-1}^{k-1}$. Точно так же число размещений, начинающихся элементом $b$, равно $A_{n-1}^{k-1}$ и т. д. Число всех размещений из $n$ по $k$, т. е. $A_n^k$, равно сумме чисел размещений, начинающихся на $a$, $b$, $c$, ... , $l$.

Всего элементов в данном множестве $n$. Следовательно,

$$A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}.$$

Эта формула верна для любого $n > 1$ и $k \leqslant n$. Значит,

$$A_{n-1}^{k-1} = (n-1)A_{n-2}^{k-2}, \text{ т. е. } A_n^k = n(n-1)A_{n-2}^{k-2}.$$

Далее

$$A_{n-2}^{k-2} = (n-2)A_{n-3}^{k-3}.$$

Отсюда

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)A_{n-3}^{k-3}.$$

Продолжая эти рассуждения далее, получим формулу

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)). \qquad (1)$$

Подставляя в эту формулу (1) вместо $k$ число $n$, получим

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$$

Это еще раз подтверждает, что размещение из $n$ элементов по $n$ является перестановкой из $n$ элементов.

По определению принято считать, что $0! = 1$. Поэтому формуле (1) можно придать другой вид, если ее правую часть умножить на дробь $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$, равную 1:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ т. е.}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 1. Из 12 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в городских олимпиадах по математике, физике, истории и географии. Каждый из учащихся участвует только в одной олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Каждая группа учащихся, направляемая на олимпиаду в составе 4 человек, отличается от любой другой группы либо учащимися, либо порядком, который определяет, по какому предмету будет соревноваться ученик. Поэтому число способов отбора учащихся равно числу размещений из 12 по 4:

$$A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880.$$

Ответ: 11 880.

Пример 2. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля?

Количество всех семизначных номеров из 10 цифр (без повторений) будет $A_{10}^7$. Из них нужно исключить те номера, которые начинаются цифрой 0. Таких номеров $A_9^6$. Значит, всего номеров, согласно условию, будет

$$A_{10}^7 - A_9^6 = \frac{10!}{(10-7)!} - \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{10!}{3!} - \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{3!}(10-1) = 544\,320.$$

Ответ: 544 320.

Пример 3. Сколько существует трехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторений), которые не кратны 3?

Числа, кратные 3, — это числа, которые составлены из цифр 1, 2, 3; 1, 2, 6; 1, 3, 5; 1, 5, 6; 2, 3, 4; 2, 4, 6; 3, 4, 5; 4, 5, 6, и только из этих цифр. Из каждой тройки цифр можно составить $P_3$ чисел, кратных 3 (сумма цифр числа, записанного в любом порядке, кратна 3). Всего троек 8. Значит, всего трехзначных чисел, кратных 3, будет

$$8 \cdot P_3 = 8 \cdot 6 = 48.$$

Всех трехзначных чисел, которые можно составить из данных 6 цифр, будет $A_6^3$, т. е. 120. Значит, количество трехзначных чисел, не кратных 3, равно

$$A_6^3 - 8P_3 = 120 - 48 = 72.$$

Ответ: 72.

**1355.** Сколькими способами могут быть присуждены первая, вторая и третья премии трем лицам из 10 соревнующихся?

**1356.** На станции имеется 8 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них четыре поезда?

**1357.** Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами из материала, имеющего 5 различных цветов?

**1358.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 составьте четырехзначные числа, в которых все цифры различны, а первой цифрой является 1, второй — 3. Сколько таких чисел?

**1359.** В вагоне имеется 10 свободных мест. В вагон вошли 6 пассажиров. Сколькими способами они могут разместиться в этом вагоне на свободных местах?

**1360.** Учащиеся школы изучают 12 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день, чтобы в нем было 5 различных предметов?

**1361.** Вычислите:

а) $A_8^3 - A_8^2$; б) $A_7^4 - A_6^3$; в) $\dfrac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$.

**1362.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные трехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких, которые:

а) кратны 2; б) кратны 3; в) кратны 4; г) кратны 5?

**1363.** Сколько различных натуральных чисел, меньших 1000, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 без повторения цифр в числе?

**1364.** Решите уравнение:

а) $A_{2n}^3 = 20A_n^2$; б) $A_n^4 = 12A_n^2$.

**1365.** Найдите значение выражения

$$\frac{A_{m-1}^{n-1} \cdot P_{m-n}}{P_{m-1}},$$

где $m \in N$, $n \in N$ и $n \leqslant m$.

**1366.** Сколькими способами можно расклеить 12 различных марок на трех листах?

## Упражнения для повторения

**1367.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x} - \sqrt{2x} = 1$; б) $x + \sqrt{x + 1} = 11$.

**1368.** Решите неравенство:

а) $\dfrac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 + x + 1} < 1$;  б) $\dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 1} > 0$.

**1369.** Постройте график функции

$$y = 2 - \sqrt{3 - x}.$$

## 59. Сочетания

Рассмотрим множество $\{a, b, c, d\}$ и составим все подмножества этого множества, содержащие два элемента. Получим

$$\begin{array}{ccc} \{a, b\}, & \{a, c\}, & \{a, d\}, \\ & \{b, c\}, & \{b, d\}, \\ & & \{c, d\}. \end{array}$$

Определение. **Подмножества, составленные из $n$ элементов данного множества и содержащие $k$ элементов в каждом подмножестве, называют сочетаниями из $n$ элементов по $k$.**

В отличие от размещений, сочетания различаются только элементами. Так $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ — одно и то же сочетание.

Число сочетаний из $n$ элементов по $k$ обозначается так: $C_n^k$. В рассмотренном выше примере $C_4^2 = 6$.

Докажем, что число сочетаний, составленных из $n$ элементов по $k$, выражается формулой

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Пусть имеется некоторое множество, содержащее $n$ элементов, и допустим, что мы составили из элементов этого множества всевозможные сочетания из $n$ по $k$. Число таких сочетаний равно $C_n^k$. В каждом сочетании произведем перестановку элементов всеми возможными способами. Каждое сочетание даст $P_k$ перестановок. В результате мы получим все размещения, которые можно составить из $n$ элементов по $k$. Таким образом,

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

Отсюда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}, \text{ т. е.}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

По определению сочетание — это подмножество данного множества.

Выясним, сколько подмножеств имеет данное множество, содержащее $n$ элементов.

Обозначим число подмножеств множества $A$, содержащего $n$ элементов, так: $M_n(A)$.

Если $A = \varnothing$, то оно, очевидно, содержит лишь одно подмножество — это $\varnothing$. Значит, $M_0(A) = 1$.

Пусть $A = \{a_1\}$, т. е. множество содержит один элемент. Тогда число подмножеств равно 2: $\varnothing$ и $\{a_1\}$. В этом случае $M_1(A) = 2$.

Пусть $A = \{a_1, a_2\}$. Тогда число подмножеств множества $A$ равно 4: $\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1, a_2\}$, т. е. $M_2(A) = 4 = 2^2$.

Аналогично можно посчитать, что $M_3(A) = 2^3$, $M_4(A) = 2^4$.

Подсчитаем число подмножеств множества $A$, содержащего 5 элементов. Для этого воспользуемся формулой $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Вычислим по отдельности числа $C_5^0$, $C_5^1$, $C_5^2$, $C_5^3$, $C_5^4$, $C_5^5$:

$$C_5^0 = 1;\ C_5^1 = 5,\ C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10,$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10,\ C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5,\ C_5^5 = \frac{5!}{5!0!} = 1.$$

Отсюда

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5.$$

Итак, мы видим, что

$$C_0^0 = 1 = 2^0,\ C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2^1,$$

$$C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 1 + 2 + 1 = 2^2,\ \dots,$$

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5.$$

Можно предположить, что число подмножеств множества $A$, содержащего $n$ элементов, равно $2^n$, т. е. $M_n(A) = 2^n$.

Докажем это методом математической индукции.

Если $n = 1$, то $M_1(A) = 2^1$, т. е. формула верна.

Пусть $n \geqslant 1$. Рассмотрим множество

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}.$$

Исключим из этого множества элемент $a_n$. Получим множество, содержащее $n - 1$ элемент. По предположению индукции

$$M_{n-1}(A) = 2^{n-1}.$$

Добавим к множеству исключенный элемент $a_n$. Тогда из каждого подмножества $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ образуется новое подмножество, в которое входит элемент $a_n$, т. е. число подмножеств по сравнению с числом подмножеств множества $A_1$ увеличится вдвое, и множество будет содержать $2 \cdot 2^{n-1}$ подмножеств, т. е. $2^n$. Значит, формула $M_n(A) = 2^n$ верна.

Отсюда следует, что

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

В процессе рассуждений мы заметили, что $C_n^0 = C_n^n$, $C_n^1 = C_n^{n-1}$ и вообще $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Докажем это.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^{n-k}.$$

Составим таблицу, в которой в первой строке запишем значение $C_0^0$, во второй строке — значения $C_1^0$ и $C_1^1$, в третьей строке — значения $C_2^0$, $C_2^1$, $C_2^2$ и т. д. Получим

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |

Эта таблица называется треугольником Б. Паскаля (1623—1662), выдающегося французского ученого-математика, физика, философа, который, в частности, занимался исследованиями в области комбинаторики.

В этой таблице на пересечении $n$-й строки и $k$-го столбца ($n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$) записано число, равное $C_n^k$.

Хорошо видна закономерность строк: числа, одинаково удаленные от начала и конца строки, равны. Это следует из того, что верно равенство $C_n^k = C_n^{n-k}$. Кроме того, складывая числа 5 и 10 (в 6-й строке), мы получаем число 15, которое стоит в 7-й строке под числом 10. Это вытекает из равенства

$$C_n^k = C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Заметим также, что числа каждой строки треугольника Паскаля равны коэффициентам многочлена, полученного от возведения в $n$-ю степень двучлена $a + b$. Например,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Рассмотрим примеры задач, в которых используется формула числа сочетаний из $n$ элементов по $k$.

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из класса, в котором 20 человек?

Очевидно, что здесь речь идет о сочетаниях, так как каждая группа учащихся в 3 человека должна отличаться хотя бы одним из учащихся. Следовательно, таких групп должно быть $C_{20}^3$.

Значит, $C_{20}^3 = \dfrac{20!}{3!17!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140.$

Ответ: 1140.

Пример 2. Из вазы с цветами, в которой стоят 10 красных гвоздик и 5 белых, выбирают 2 красные гвоздики и одну белую. Сколькими способами можно сделать такой выбор букета?

Каждый выбор содержит 3 цветка, в котором 2 гвоздики красные и 1 белая. Выбрать 2 красные гвоздики из 10 красных можно $C_{10}^2$ способами. После этого белую гвоздику можно выбрать $C_5^1$ способами.

Каждому выбору красных гвоздик соответствует определенный выбор белой гвоздики. Поэтому выбор букета из двух красных и одной белой гвоздик можно сделать $C_{10}^2 \cdot C_5^1$ способами.

Имеем $C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 45 \cdot 5 = 225.$

Значит, выбор букета, о котором говорится в задаче, можно осуществить 225 способами.

Пример 3. Семь огурцов и три помидора надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один помидор и чтобы овощей в пакетах было поровну. Сколькими способами это можно сделать?

Чтобы в пакетах овощей было поровну, в каждом пакете должно находиться 5 овощей. Если положить в один пакет один помидор, то остальные овощи — 4 огурца — можно положить в этот пакет $C_7^4$ способами.

Если в другой пакет положить 2 помидора, то остальные овощи — 3 огурца — можно положить в этот пакет $C_7^3$ способами.

Следовательно, в первый пакет овощи можно разложить $C_3^1 \cdot C_7^4$ способами, т. е. $3 \cdot \dfrac{7!}{4!3!} = \dfrac{3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 105$ способами. Во второй пакет овощи можно разложить $C_3^2 \cdot C_7^3$, т. е. $3 \cdot \dfrac{7!}{3!4!} = 105$ способами.

Согласно условию задачи в обоих пакетах овощей будет поровну.

Ответ: овощи в два пакета можно разложить 105 способами.

**1370.** Из спортсменов А, Б, В, Г, Д и Е выбирается пара для участия в соревнованиях пар по теннису. Сколько существует способов выбора этой пары?

**1371.** На плоскости отмечены 10 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две из них проведена прямая. Сколько проведено прямых?

· **1372.** Сколько диагоналей имеет выпуклый двенадцатиугольник?

**1373.** Сколькими способами можно упаковать 17 различных книг в две пачки, по 8 и 9 книг в каждой?

**1374.** Сколько нечетных делителей имеет число 3570? Сколько четных делителей имеет это число?

**1375.** Дано множество $X = \{a, b, c, d\}$. Составьте все подмножества множества $X$, которые

а) не содержат элемента $a$; б) не содержат элементов $b$ и $d$.

**1376.** Сколько подмножеств имеет множество, содержащее:

а) 8 элементов; б) 10 элементов?

**1377.** Из 10 разных цветков нужно составить букет, содержащий 3 цветка, 5 цветков, 7 цветков, 9 цветков. Сколькими способами это можно сделать?

**1378.** Сколько можно составить из делителей числа 210 составных чисел, которые содержат:

а) только два простых делителя;

б) только три простых делителя?

**1379.** Сколько членов содержит многочлен

$$abc + abd + \ldots + klm,$$

составленный из 12 переменных, в котором каждый член является произведением трех множителей и нет подобных членов?

**1380.** Решите уравнение:

а) $C_{n-1}^3 + C_n^3 = 30$; в) $14C_x^{x-2} = 15A_{x-3}^2$;

б) $C_n^4 + 2C_{n-1}^4 + C_{n-1}^2 = 80$; г) $6C_x^{x-3} = 11A_{x-1}^2$.

**1381.** Сколько человек участвовали в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии и всего было сыграно 136 партий?

## Упражнения для повторения

**1382.** Укажите номера положительных членов последовательности $(a_n)$, если $a_n = \dfrac{6n - n^2}{5}$.

**1383.** Докажите, что многочлен $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9$ не имеет отрицательных корней.

**1384.** Постройте треугольник с вершинами $A(0;\ 3)$, $B(3;\ 0)$, $C(5;\ 6)$ и задайте его системой неравенств с двумя переменными.

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Что называется перестановкой из $n$ элементов? Выведите формулу числа перестановок из $n$ элементов.

**2.** Дайте определение размещения из $n$ элементов по $k$ и выведите соответствующую формулу.

**3.** Дайте определение сочетания из $n$ элементов по $k$. Выведите соответствующую формулу.

# § 22. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## 60. Частота и вероятность

Мы живем в мире, где наряду с событиями, непременно наступающими (например, смена времени года), происходят события, зависящие от случая. Случайно перегорела лампочка, случайно произошло замыкание и начался пожар, купленный лотерейный билет случайно оказался выигрышным. Все это события, которые заранее предсказать невозможно.

Событие, которое в процессе наблюдения или испытания (эксперимента) может произойти или не произойти, называют *случайным* событием.

Приведем еще примеры случайных событий: поражение мишени или промах в результате произведенного выстрела, выигрыш или проигрыш футбольной команды в матче, выпадение орла или решки при подбрасывании монеты — все это случайные события.

Пусть определенное испытание повторяется много раз и при этом каждый раз фиксируется, произошло или нет интересующее нас событие $A$. Обозначим буквой $n$ общее число испытаний, а буквой $m$ — число появлений события $A$ в результате проведенных $n$ испытаний. Тогда отношение $\frac{m}{n}$ называют *частотой случайного события $A$.*

Статистика показывает, что при повторении одного и того же опыта (или наблюдения), допускающего многократное его повторение в одних и тех же условиях, частота появления ожидаемого случайного события остается примерно одинаковой, незначительно отличаясь от некоторого постоянного числа.

Рассмотрим такой пример. Бросают монету. Она может упасть кверху орлом или решкой. Как часто монета падает кверху орлом?

Многие ученые проводили эксперимент. При многократном бросании монеты подсчитывалось число выпадений орла. Результаты этих опытов показаны в таблице.

| Фамилия | Кол-во бросков | Частота выпадений орла | Фамилия | Кол-во бросков | Частота выпадений орла |
|---|---|---|---|---|---|
| Бюффон | 4040 | 0,507 | Романовский | 80 640 | 0,4923 |
| Де Морган | 4092 | 0,5005 | Пирсон К. | 24 000 | 0,5005 |
| Джевонс | 20 480 | 0,5068 | Феллер | 10 000 | 0,4979 |

Из таблицы видно, что выпадение орла во всех случаях близко к $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим другой пример.

Приведем данные о рождаемости девочек в течение года. По данным шведской статистики частота рождения девочек за 1935 год, т. е. отношение числа родившихся девочек к числу родившихся детей, характеризуется следующими числами:

| | |
|---|---|
| январь — 0,486, | июль — 0,462, |
| февраль — 0,489, | август — 0,484, |
| март — 0,490, | сентябрь — 0,495, |
| апрель — 0,471, | октябрь — 0,491, |
| май — 0,478, | ноябрь — 0,482, |
| июнь — 0,482, | декабрь — 0,473. |

Несмотря на то что общее число рождений меняется в течение года, частота рождения девочки довольно устойчиво колеблется около среднего значения 0,482. Такие статистические закономерности открыты еще в XVIII веке. Это было подтверждено демографическими материалами при изучении статистики рождаемости, смертности, несчастных случаев и т. п.

Подобные закономерности позволяют подойти к статистическому определению вероятности. Если в длинной серии экспериментов со случайными исходами, которые могут быть многократно проверены в одинаковых условиях, значения частот близки к некоторому постоянному числу, то это число принимают за вероятность данного события. Такое определение вероятности называют *статистическим*.

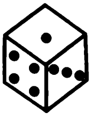


Рис. 139

Для того чтобы найти частоту при проведении того или иного испытания, мы должны провести достаточно большое число экспериментов и лишь после этого можем определить приближенно вероятность наступления интересующего нас случайного события.

В то же время если шансы наступления случайного события равновозможны, то вероятность наступления данного события можно определить путем правдоподобных рассуждений, основанных на практическом опыте и здравом смысле.

Вернемся к примеру с бросанием монеты. Если монета правильная, то нет никаких оснований полагать, что шансы выпадения орла больше, чем шансы выпадения решки (этим обычно пользуются, когда бросают жребий, например, в начале футбольного матча, какая команда должна первой ввести мяч в игру). Иначе говоря, вероятность выпадения орла такая же, как и вероятность выпадения решки.

Рассмотрим пример с игральным кубиком, который представляет собой маленький куб, на гранях которого выбиты очки 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 139). Если этот кубик сделан из однородного материала, то при его бросании шансы выпадания на верхней грани любого числа очков от 1 до 6 равновозможны. Говорят, что $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — это множество равновозможных исходов опыта при бросании игрального кубика.

Пусть событие $A$ означает, что при бросании кубика выпадет четное число очков. Событие $A$ произойдет при трех исходах: выпало 2 очка, 4 очка или 6 очков. В таких случаях говорят, что эти исходы *благоприятны для наступления события $A$.*

При бросании кубика всего 6 равновозможных исходов, из них 3 — благоприятны для наступления события $A$. Благоприятные для $A$ исходы составляют $\frac{3}{6}$ всех исходов. Это отношение называют вероятностью наступления события $A$ и пишут

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Определение. **Вероятностью события $A$ называется отношение числа благоприятных для $A$ исходов к числу всех равновозможных исходов.**

Это определение вероятности называют *классическим.*

Сопоставляя классическое и статистическое определение вероятности, можно сделать вывод: нахождение классической вероятности не требует, чтобы испытание проводилось в действительности, а нахождение статистической вероятности (частоты) предполагает, чтобы испытание было проведено фактически.

Пусть $B$ — событие, которое состоит в том, что при бросании игрального кубика выпадет четное или нечетное число очков. Найдем $P(B)$. В этом случае каждый исход из множества

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

является благоприятным для события $B$. Поэтому $P(B) = \frac{6}{6} = 1$.

Такие события, которые происходят всегда, сколько бы раз ни проводилось испытание, называют *достоверными*. Вероятность достоверного события равна 1.

Пусть $C$ — событие, означающее, что при бросании игрального кубика на нем выпадет более 6 очков. Очевидно, это событие произойти не может. Число благоприятных для $C$ исходов равно нулю. Значит, $P(C) = 0$. Такие события называют *невозможными*.

Рассмотрим вообще некоторое событие $M$, которое при проведении испытания имеет $n$ равновозможных исходов, причем $m$ исходов благоприятны для наступления события $M$. Тогда $P(M) = \frac{m}{n}$.

Очевидно, что $m \leqslant n$. Поэтому $\frac{m}{n} \leqslant 1$, т. е. $P(M) \leqslant 1$. С другой стороны, $\frac{m}{n} \geqslant 0$, так как $0 \leqslant m \leqslant n$. Значит, $P(M) \geqslant 0$. Отсюда следует, что $0 \leqslant P(M) \leqslant 1$.

Рассмотрим примеры вычисления вероятностей некоторых событий.

Пример 1. В урне 10 одинаковых шаров разного цвета: 2 красных, 3 синих и 5 желтых. Шары тщательно перемешаны. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется:

а) красным (событие К);

б) синим (событие С);

в) желтым (событие Ж)?

Для события К благоприятным являются 2 исхода, для события С — 3 исхода, для события Ж — 5 исходов.

Отсюда имеем:

$$P(\text{К}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5};\quad P(\text{С}) = \frac{3}{10};\quad P(\text{Ж}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Монету бросают дважды. Какова вероятность того, что оба раза выпадет решка; оба раза не выпадет решка?

Обозначим выпадение решки буквой $p$, а орла — буквой $o$. Тогда множество $U$ равновозможных исходов таково: $U = \{po, pp, op, oo\}$.

Обозначим буквой $A$ событие, что оба раза выпадет решка, а буквой $B$ — оба раза не выпадет решка.

Для события $A$ благоприятен один исход, а для события $B$ — три исхода (*ро*, *ор*, *оо*). Отсюда

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{3}{4}.$$

Такие события, как $A$ и $B$, называют *противоположными событиями*. Событие $A$ или $B$ — достоверное событие:

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Обычно событие, противоположное событию $A$, обозначают $\bar{A}$. В данном случае $B = \bar{A}$.

Вообще если множество $U$ имеет $n$ равновозможных исходов и из них $k$ исходов благоприятны для события $A$, то для события $\bar{A}$ благоприятны $n - k$ исходов. Отсюда

$$P(A) + P(\bar{A}) = \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} = 1.$$

Значит, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Пример 3. Коля и Миша бросают два игральных кубика (белый и черный). Они договорились, что если при бросании кубиков в сумме выпадет 8 очков, то выиграл Коля, а если в сумме выпадет 7 очков, то выиграл Миша. Справедлива ли эта игра?

Все равновозможные исходы при бросании двух кубиков образуют множество пар, в которых первая цифра в паре — это число очков, выпавших на белом кубике, а вторая цифра в паре — это число очков, выпавших на черном кубике. Это множество пар представлено в таблице.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1; 1) | (2; 1) | (3; 1) | (4; 1) | (5; 1) | (6; 1) |
| (1; 2) | (2; 2) | (3; 2) | (4; 2) | (5; 2) | (6; 2) |
| (1; 3) | (2; 3) | (3; 3) | (4; 3) | (5; 3) | (6; 3) |
| (1; 4) | (2; 4) | (3; 4) | (4; 4) | (5; 4) | (6; 4) |
| (1; 5) | (2; 5) | (3; 5) | (4; 5) | (5; 5) | (6; 5) |
| (1; 6) | (2; 6) | (3; 6) | (4; 6) | (5; 6) | (6; 6) |

Всего равновозможных исходов 36.

Найдем вероятность того, что на верхних гранях кубиков выпадет 8 очков (событие $A$), выпадет 7 очков (событие $B$).

Для события $A$ благоприятны 5 исходов: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2), а для события $B$ благоприятны 6 исходов: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1). Отсюда

$$P(A) = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{6}{36}.$$

Значит, шансов выиграть у Миши больше, чем у Коли. Поэтому такую игру нельзя назвать справедливой.

Пример 4. Из собранных 10 велосипедов только 7 не имеют дефектов. Какова вероятность того, что 4 выбранных велосипеда из этих 10 окажутся без дефекта?

Пусть $A$ — событие, при котором все выбранные 4 велосипеда из 10 оказались исправными. Каждое сочетание из 10 по 4 является равновозможным исходом выбора 4 велосипедов из 10. Значит, всего равновозможных исходов $C_{10}^4$. Число исходов, благоприятых для наступления события $A$, равно $C_7^4$. Значит,

$$P(A) = \frac{C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{7!}{4!3!} : \frac{10!}{4!6!} = \frac{7!4!6!}{4!3!10!} = \frac{1}{6}.$$

**1385.** В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Какова частота появления нестандартных деталей?

**1386.** На учениях по стрельбе из пистолета частота поражения мишени оказалась равной 0,85. Сколько попаданий в цель можно ожидать, если по мишени было произведено 120 выстрелов?

**1387.** Выберите 10 строк текста. Проведите подсчет и найдите частоту появления:

а) буквы а; б) буквы е; в) буквы к; г) буквы я.

**1388.** Найдите вероятность при бросании игрального кубика появления:

а) 2 очков;

б) числа очков, больших 3;

в) 1 очка или 6 очков;

г) числа очков, меньших 6.

**1389.** Какова вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма очков на них окажется равной:

а) 4; б) 5; в) 9; г) 12?

**1390.** В урне 10 белых, 4 черных и 6 желтых шаров одинаковых размеров. Из урны достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется:

а) белым; б) черным; в) желтым; г) белым или черным?

**1391.** В первой урне два белых и три черных шара, во второй урне три белых и два черных шара. Из каждой урны достали по одному шару. Какова вероятность того, что хотя бы один из двух шаров окажется белым?

**1392.** В урне 10 одинаковых шаров разного цвета: 2 белых, 3 красных и 5 синих. Наугад вынимаются два шара. Найдите вероятность событий:
а) $A$ — оба шара белые;
б) $B$ — оба шара красные;
в) $C$ — оба шара синие.

**1393.** В урне 8 белых и 4 черных шара. Из урны извлекаются 2 шара. Найдите вероятность того, что оба шара будут белыми.

**1394.** Из 28 костей домино выбирают наугад одну кость. Какова вероятность того, что выбранная кость содержит в сумме:
а) 5 очков; б) 6 очков; в) 10 очков?

**1395.** В настольной игре «Пираты» участники поочередно бросают сразу два игральных кубика. Если при этом выпадает дубль, то участник делает два хода подряд. Какова вероятность того, что участнику игры удается сделать два хода подряд при очередном броске?

**1396.** Бросают 3 монеты. Какова вероятность того, что все они упадут решкой?

**1397.** Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня, что эти цифры различны, набрал наугад. Какова вероятность того, что он с первого раза наберет нужный номер телефона?

**1398.** В гараже 7 шин из 10 без брака. Какова вероятность того, что среди 6 шин, взятых наугад, 4 окажутся без брака?

**1399.** Из 28 костей домино наугад извлекается кость. Найдите вероятность того, что вторую извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость:
а) оказалась дублем; б) не является дублем.

**1400.** Из колоды в 36 карт выбирается наугад одна карта. Какова вероятность того, что это будет дама пик или туз (любой масти)?

## Упражнения для повторения

**1401.** Является ли арифметической прогрессией последовательность, сумма первых $n$ членов которой вычисляется по формуле:
а) $S_n = 2n^2 - 5$; б) $S_n = n^3 - 3n^2$; в) $S_n = 1{,}5n^2 - n^3$?

**1402.** Постройте график функции:
а) $y = 2x^2 - 3|x| - 2$; б) $y = x^2 - 4x + |2x - 1|$.

**1403.** Найдите область определения функций
а) $y = \sqrt{\sin x}$; в) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$,
б) $y = \sqrt{\sin 2x}$;
рассматривая эти функции на промежутке $[-2\pi; 2\pi]$.

## 61. Сложение вероятностей

Пусть при проведении одного и того же испытания наблюдаются события $A$, $B$ и $C$. Причем событие $C$ означает, что при испытании произошло хотя бы одно из двух событий — $A$ или $B$. В таких случаях $C$ называют *объединением событий* $A$ и $B$ и обозначают $C = A \cup B$.

Рассмотрим пример.

В мешке находятся жетоны с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Пусть событие $A$ означает, что из мешка извлечен жетон с номером, кратным 3; событие $B$ означает, что из мешка извлечен жетон с номером, кратным 4. Какова вероятность события $C$, означающего, что из мешка извлечен жетон с номером, кратным 3 или 4?

Событие $C$ есть объединение событий $A$ и $B$, т. е. $C = A \cup B$. Множество всех равновозможных исходов в этом испытании — это множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, где цифрами обозначены номера жетонов, находящихся в мешке.

Для события $A$ благоприятными являются исходы, при которых извлекаются жетоны с номерами 3, 6 и 9, для события $B$ — исходы с номерами 4 и 8, для события $C$ — исходы с номерами 3, 4, 6, 8, 9. Значит,

$$P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};\ P(B) = \frac{2}{9};\ P(C) = \frac{5}{9}.$$

Отсюда следует

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Рассмотренные в этом примере события $A$ и $B$ являются *несовместными*, т. е. любой исход не может быть одновременно благоприятным как для события $A$, так и для события $B$. Для таких событий верна теорема:

**вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.**

Докажем это.

Пусть $n$ — общее число исходов испытания, $m_1$ — число исходов, благоприятных для наступления события $A$, $m_2$ — число исходов, благоприятных для наступления события $B$.

Тогда $P(A) = \frac{m_1}{n}$; $P(B) = \frac{m_2}{n}$.

Так как события $A$ и $B$ несовместны, то для события $A \cup B$ число благоприятных исходов равно $m_1 + m_2$. Отсюда

$$P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B), \text{ т. е.}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Можно доказать, что вообще вероятность объединения попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Рассмотрим примеры, в которых применяется теорема о сложении вероятностей несовместных событий.

Пример 1. В урне находится 30 шаров: 10 белых, 15 красных и 5 синих. Найдем вероятность появления цветного шара.

Вероятность появления красного шара (событие $A$) равна

$$P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

Вероятность появления синего шара (событие $B$) равна

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

События $A$ и $B$ несовместные (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому можно применить теорему сложения вероятностей. Вероятность появления цветного шара (либо красного, либо синего) равна

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Пример 2. В контейнере 10 деталей, из них 2 нестандартные. Найдем вероятность того, что из 6 наугад отобранных деталей окажется не более одной нестандартной.

Решение. Пусть событие $A$ означает, что среди отобранных 6 деталей все детали стандартные, а событие $B$ означает, что среди отобранных 6 деталей есть одна нестандартная.

Всего равновозможных исходов $C_{10}^6$. Благоприятных для события $A$ исходов $C_8^6$. Благоприятных для события $B$ исходов $C_2^1 \cdot C_8^5$.

Действительно, одну нестандартную деталь из 2 можно извлечь $C_2^1$ способами, а оставшиеся 5 стандартных деталей — $C_8^5$ способами. Каждому способу извлечения одной нестандартной детали соответствует один способ извлечения 5 стандартных деталей. Поэтому число благоприятных исходов для события $B$ равно $C_2^1 \cdot C_8^5$. События $A$ и $B$ несовместные. Значит,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{C_8^6}{C_{10}^6} + \frac{C_2^1 \cdot C_8^5}{C_{10}^6} = \frac{28}{210} + \frac{112}{210} = \frac{140}{210} = \frac{2}{3}.$$

Введем еще одно понятие. Система несовместных событий $A_1$, $A_2$, ... , $A_n$ называется *полной*, если события, входящие в данную систему, являются единственно возможными.

Поясним это на примере с бросанием игрального кубика.

а) Пусть событие $A_n$, где $1 \leqslant n \leqslant 6$, означает, что выпало $n$ очков. Тогда система событий $A_1, A_2, \ldots, A_6$ является полной. При этом

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_6) =$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6} = 1.$$

б) Пусть событие $C$ означает, что выпало не более 2 очков, а событие $D$ означает, что выпало больше 2 очков. В этом случае система событий $C$ и $D$ также является полной:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1.$$

Вообще если система попарно несовместных событий $A_1$, $A_2$, ... , $A_n$ является полной, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Примером двух несовместных событий, образующих полную систему, являются два противоположных события $A$ и $\bar{A}$. Их объединение — достоверное событие:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Отсюда $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Пример 3. Из колоды в 32 карты вынимают наугад три карты. Найдем вероятность того, что среди вынутых карт будет хотя бы один туз.

Эту задачу проще решить, используя понятие противоположного события и формулу $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Событие $A$ — извлечен хотя бы один туз — означает, что число вынутых тузов будет не меньше чем 1, т. е. 1, 2 или 3.

Событие $\bar{A}$ означает, что извлеченные из колоды три карты не содержат ни одного туза.

Вероятность того, что число вынутых тузов равно нулю, равна

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{28}^3}{C_{32}^3}.$$

Действительно, число равновозможных исходов равно $C_{32}^3$, а число исходов, благоприятных для события $\bar{A}$ (0 тузов), — $C_{28}^3$.

Вычислим $P(\bar{A})$:

$$\frac{C_{28}^3}{C_{32}^3} = \frac{28!}{25!3!} : \frac{32!}{29!3!} = \frac{28!29!3!}{25!3!32!} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{32 \cdot 31 \cdot 30} =$$

$$= \frac{7 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 10 \cdot 31} = \frac{819}{1240} \approx 0{,}66.$$

Отсюда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 1 - 0{,}66 = 0{,}34.$$

Пример 4. В соревнованиях по бегу участвуют четыре спортсмена под номерами 1, 2, 3 и 4. Тренеры оценивают шансы занять первое место для спортсменов под номерами 1 и 3 как одинаковые, а для спортсменов под номерами 2 и 4 — вдвое меньше. Какова вероятность, что к финишу первым придет спортсмен под номером 1 или 4?

Пусть $A$, $B$, $C$ и $D$ соответственно события: «первым придет спортсмен под № 1», «первым придет спортсмен под № 2», «первым придет спортсмен под № 3», «первым придет спортсмен под № 4».

Положим $P(B) = P(D) = a$. Тогда $P(A) = P(C) = 2a$. События $A$, $B$, $C$ и $D$ образуют полную систему. Значит,

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1,$$

т. е. $2a + a + 2a + a = 1$. Отсюда $a = \frac{1}{6}$.

Применяя теорему о сложении вероятностей несовместных событий, найдем

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Значит, вероятность того, что первым к финишу придет спортсмен под номером 1 или под номером 4, равна $\frac{1}{2}$.

**1404.** Бросают игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадет:
а) 1 очко или 6 очков;
б) 5 очков или число очков, меньшее 3?

**1405.** При стрельбе по мишени вероятность выбить 10 очков равна 0,2, а вероятность выбить 9 очков равна 0,5. Чему равна вероятность выбить не менее 9 очков?

**1406.** На каждой из четырех карточек написано по одной букве: о, р, с, т. Карточки положили на стол буквами вниз и перемешали. Затем взяли наугад одну карточку за другой и в том же порядке составили слово. Какова вероятность, что в результате оказалось слово:
а) сорт или трос;
б) не оказалось слова трос?

**1407.** Из колоды в 36 карт извлекают одну карту. Какова вероятность того, что эта карта будет:
а) королем пик или дамой треф;
б) дамой или валетом (любой масти);
в) картой червонной масти или тузом пик;
г) ни тузом, ни королем, ни дамой?

**1408.** В урне находится 36 шаров: 8 белых, 4 черных, 16 синих и 8 красных. Из урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется:
а) белым или черным;
б) синим или красным;
в) не белым;
г) не синим?

**1409.** В урне находится 11 шаров, из которых 7 белых и 4 цветных. Из урны извлекают один шар, фиксируют, цветной он или нет, затем шар возвращают в урну. После этого опять извлекают один шар. Какова вероятность того, что после двукратного извлечения оба шара окажутся цветными?

**1410.** В ящике находится 16 деталей, из которых 12 — стандартные. Найдите вероятность того, что среди двух извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

**1411.** В мешке находятся жетоны, номерами которых являются все трехзначные числа. Из мешка вынимают один жетон. Какова вероятность того, что его номер содержит хотя бы две одинаковые цифры?

### Упражнения для повторения

**1412.** Постройте график функции $y = \frac{|x| - 2}{|x| + 2}$.

**1413.** Решите неравенство

$$\sqrt{10x + 3} < \sqrt{14 - x}.$$

**1414.** Имеет ли предел последовательность $(x_n)$, если

$$x_n = \frac{(-1)^n n}{n + 1}?$$

## 62. Умножение вероятностей

Рассмотрим пример. В урне находятся 6 жетонов с номерами от 1 до 6 включительно, т. е. номера жетонов в урне образуют множество $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Из урны вынимают один жетон. Обозначим буквой $A$ событие, когда из урны вынимают жетон с номером, кратным 2. После этого жетон возвращают в урну. Затем из урны снова вынимают жетон. Пусть $B$ — событие, означающее, что из урны извлечен жетон с номером, кратным 3. Какова вероятность наступления события $A$ и события $B$ при этом испытании?

Для события $A$ благоприятны исходы, образующие множество $\{2, 4, 6\}$, а для события $B$ благоприятны исходы, составляющие множество $\{3, 6\}$. Поэтому $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Событие $B$ не зависит от события $A$, так как вероятность повторного извлечения жетона не влияет на то, какой жетон был вынут в первый раз (извлеченный в первый раз жетон был возвращен в урну).

Если после первого извлечения жетона из урны его не возвратят в урну, то вероятность вторичного извлечения жетона (событие $B$) будет иной, так как в урне уже не 6 жетонов, а 5. Если в первый раз извлечен жетон, кратный 3, то $P(B) = \frac{1}{5}$, если же в первый раз извлекли жетон с номером, не кратным 3, то $P(B) = \frac{2}{5}$. В этом случае вероятность события $B$ зависит от события $A$, т. е. события $A$ и $B$ являются зависимыми.

В дальнейшем мы будем рассматривать независимые события.

**Два события называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.**

Вернемся к рассмотренному примеру, когда жетон извлекали из урны и затем возвращали обратно.

Подсчитаем вероятность появления жетона с номером, кратным 2 и кратным 3, в результате двукратного извлечения жетонов из урны с возвращением (событие $C$).

Событие $C$, состоящее в совместном появлении событий $A$ и $B$, называют ***пересечением этих событий*** и обозначают $C = A \cap B$.

Множество равновозможных исходов при первом извлечении жетона — это множество $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а при втором извлечении жетона — то же множество $M$. Множество равновозможных исходов при двукратном извлечении жетонов — это множество пар $(x, y)$, где буквой $x$ обозначен номер жетона при первом его извлечении, а буквой $y$ — при втором извлечении. Это множество записано в виде таблицы.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1; 1) | (2; 1) | (3; 1) | (4; 1) | (5; 1) | (6; 1) |
| (1; 2) | (2; 2) | (3; 2) | (4; 2) | (5; 2) | (6; 2) |
| (1; 3) | (2; 3) | (3; 3) | (4; 3) | (5; 3) | (6; 3) |
| (1; 4) | (2; 4) | (3; 4) | (4; 4) | (5; 4) | (6; 4) |
| (1; 5) | (2; 5) | (3; 5) | (4; 5) | (5; 5) | (6; 5) |
| (1; 6) | (2; 6) | (3; 6) | (4; 6) | (5; 6) | (6; 6) |

Всего равновозможных исходов 36.

Из этого числа равновозможных исходов благоприятными для события $A \cap B$ будут $3 \cdot 2 = 6$ исходов. Это пары:

$$(2;\ 3),\ (2;\ 6),\ (4;\ 3),\ (4;\ 6),\ (6;\ 3),\ (6;\ 6).$$

Значит, $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

С другой стороны, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$. Отсюда

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Докажем, что вообще ***вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.***

Пусть $n_1$ — число всех равновозможных исходов испытания, в которых событие $A$ наступает или не наступает;

$m_1$ — число исходов, благоприятных для события $A$;

$n_2$ — число всех равновозможных исходов испытания, в которых событие $B$ наступает или не наступает;

$m_2$ — число благоприятных исходов для события $B$.

Общее число равновозможных исходов испытания равно $n_1n_2$, так как каждый из $n_1$ исходов, в которых событие $A$ наступает или не наступает, может сочетаться с каждым из $n_2$ исходов, в которых событие $B$ наступает или не наступает. Из этого числа $n_1n_2$ исходов благоприятными для события $A \cap B$ являются $m_1m_2$ исходов. Действительно, каждый из $m_1$ исходов, благоприятных для события $A$, сочетается с каждым из $m_2$ исходов, благоприятных для события $B$. Поэтому

$$P(A \cap B) = \frac{m_1m_2}{n_1n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B).$$

Значит, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Эта теорема допускает обобщение.

Несколько событий называют *независимыми в совокупности*, если каждое из них и любая комбинация остальных событий есть событие независимое. Так, если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то они попарно независимы.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример 1. Монету бросают 3 раза подряд. Пусть $A$, $B$ и $C$— события, означающие, что решка выпадает при первом, втором и третьем бросании. Найдем вероятность события $A \cap B \cap C$.

Каждое из двух событий $A$ и $B$, $A$ и $C$, $B$ и $C$ независимы, т. е. события $A$, $B$ и $C$ независимы в совокупности. Поэтому вероятность наступления события $A \cap B \cap C$ равна произведению вероятностей $P(A)$, $P(B)$ и $P(C)$. Так как $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, то

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Пример 2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, а при стрельбе из второго орудия равна 0,7. Найдем вероятность хотя бы одного попадания в цель, если каждое орудие сделало по одному выстрелу.

Пусть событие $A_1$ означает, что цель поражена первым орудием, а событие $A_2$ — цель поражена вторым орудием. Тогда $\overline{A_1}$ означает промах при стрельбе из первого орудия и $\overline{A_2}$ — промах при стрельбе из второго орудия.

Отсюда имеем:

$$P(\overline{A_1}) = 1 - 0,8 = 0,2; \quad P(\overline{A_2}) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

События $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ независимые. Событие $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ означает, что цель не поражена ни одним из двух орудий.

Следовательно,

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06.$$

Пусть событие $A$ означает, что цель поражена хотя бы одним орудием. Очевидно, что $A$ и $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ — противоположные события. Поэтому

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

**1415.** В урне находится 5 шаров: 2 белых и 3 черных. Из урны вынимают один шар. Фиксируют, белый он или черный. После этого шар возвращают в урну. Затем вновь вынимают шар. Какова вероятность того, что при двукратном извлечении шара из урны оба шара окажутся черными?

**1416.** Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что на одном из них выпадет 2 очка, а на другом — нечетное число очков?

**1417.** Бросили игральный кубик и монету одновременно. Какова вероятность, что на монете выпадет орел, а на игральном кубике — четное число очков?

**1418.** Из трех станков, работающих в цехе, вероятность остановки за смену первого станка равна 0,2, второго — 0,15 и третьего — 0,12. Какова вероятность того, что все три станка за смену не остановятся?

**1419.** В первой партии электролампочек находится 4% бракованных, во второй партии — 5% бракованных. Наугад берут две лампочки, одна — из первой партии, а вторая — из второй. Какова вероятность того, что:

а) обе лампочки окажутся исправными;

б) хотя бы одна из лампочек окажется исправной?

**1420.** Испытания на полигоне трех орудий показали: первое орудие поражает цель в 800 случаях из 1000, второе — в 750 случаях, а третье — в 600 случаях. Какова вероятность поразить цель, если каждое орудие совершит по одному выстрелу?

**1421.** Подбрасывают 4 игральных кубика. Какова вероятность того, что на каждом из них выпало число очков, кратное 2?

**1422.** В урне лежат 5 черных шаров, 4 красных и 3 белых. Последовательно вынимают три шара, причем каждый шар возвращают в урну перед тем, как вынимают следующий. Какова вероятность того, что первый шар окажется черным, второй — красным и третий — белым?

**1423.** Игральный кубик бросают три раза. Какова вероятность того, что при первом бросании выпадет нечетное число очков, при втором — четное число очков, а при третьем бросании — 6 очков?

## Упражнения для повторения

**1424.** Три целых числа составляют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1. Если ко второму члену прибавить 3, а третий — возвести в квадрат, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

**1425.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |y+1| = 3, \\ 2x - |y+1| = 5. \end{cases}$$

**1426.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{3x+1} + \sqrt[6]{1-3x} = 1;$

б) $\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{3x+1} + \sqrt[6]{9x+19} = 7.$

## Контрольные вопросы и задания

**1.** Объясните, что называют частотой случайного события. Дайте определение вероятности. В чем состоит различие между статистическим и классическим понятиями вероятности?

**2.** В каких случаях вероятности случайных событий складывают, в каких — перемножают? Приведите примеры.

## Дополнительные упражнения к главе 7

### К параграфу 21

**1427.** Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные шестизначные числа без повторения цифр. Сколько существует таких чисел?

**1428.** По пустыне идет караван из 11 верблюдов. Сколькими способами можно сформировать этот караван, чтобы в середине всегда шел один и тот же верблюд?

**1429.** Сколько нечетных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если каждую цифру в числе можно использовать только один раз?

**1430.** Среди различных 18 книг имеется пятитомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на одной полке, причем так, чтобы книги пятитомника стояли рядом?

**1431.** На полке находится 16 различных книг, из которых 10 — в черных переплетах и 6 — в зеленых. Книги переставляют всеми возможными способами. Сколько таких положений, при которых книги в черных переплетах занимают 10 первых мест?

**1432.** Из цифр 2, 3, 5, 7, 8, 9 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди этих чисел таких, которые:
а) кратны 5; б) кратны 2?

**1433.** Из цифр 1, 2, 3 составьте всевозможные трехзначные числа с повторением цифр. Сколько таких чисел?

**1434.** Сколько всевозможных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 с повторением цифр?

**1435.** Сколькими способами можно 5 различных предметов разложить в 3 ящика?

**1436.** В шахматном турнире участвуют 6 школьников и 10 студентов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые школьниками в турнире, если никакие 2 участника не набрали одинаковое число очков?

**1437.** Сколько существует перестановок из $n$ элементов, у которых два элемента расположены рядом?

**1438.** Сколько перестановок можно составить из элементов множества $\{a, b, c, 1, 2, 3\}$, в которых:
а) первыми элементами являются буквы;
б) первым и последним элементами являются буквы?

**1439.** Сколько можно составить из цифр 1, 2, ..., 9 шестизначных чисел, таких, у которых нечетные цифры стоят на нечетных местах, а четные — на четных?

**1440.** Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

**1441.** Сколькими способами можно разложить 25 яблок в две вазы по 12 и 13 яблок в каждой вазе?

**1442.** Сколько членов содержит многочлен

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4x_5 + \ldots + x_7x_8x_9x_{10},$$

в котором каждый член есть произведение четырех переменных, принадлежащих множеству без повторения одинаковых множителей?

**1443.** Найдите наименьшее значение $n$, при котором значение выражения $\frac{P_{2n}}{P_{n-1}}$ оканчивается точно пятью нулями.

### К параграфу 22

**1444.** Пять раз бросали монету и каждый раз выпадала решка. Какова вероятность, что шестой раз снова выпадет решка?

**1445.** Ящик со 100 игрушками содержит 10 игрушек с дефектами. Из ящика случайным образом извлекают 5 игрушек. Какова вероятность, что хотя бы одна игрушка окажется с дефектом?

**1446.** Из 60 деталей, лежащих в ящике, 5 являются бракованными. Какова вероятность, что наугад выбранная деталь окажется без брака?

**1447.** В коробке лежат 25 карандашей, причем 3 из них плохо заточены. Наугад вынимают один карандаш. Какова вероятность, что он окажется хорошо заточенным?

**1448.** Случайно встретились 7 человек. Что более вероятно: все они родились в разные дни недели или хотя бы два из них родились в один и тот же день недели?

**1449.** Из 28 костей домино извлекают наугад две кости. Какова вероятность, что выбранные кости будут двумя дуплями?

**1450.** В урне один белый шар и три черных. Наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что они оба черные?

**1451.** В урне 10 белых и 5 черных шаров. Наугад вынимают 3 из них. Какова вероятность того, что извлеченными шарами окажутся:
а) 2 белых и 1 черный шар;
б) 1 белый и 2 черных шара?

**1452.** В ящике лежат 8 зеленых, 6 черных и 5 белых шаров. Из ящика наугад извлекают один шар. Найдите вероятность извлечения либо черного, либо белого шара.

**1453.** Из натурального числа, не превосходящего 30, выбирают наугад одно число. Какова вероятность того, что это число окажется:
а) кратным 3;
б) простым;
в) кратным 3 или кратным 11;
г) кратным 4 или простым числом?

**1454.** Зачет по стрельбе считается сданным, если курсант получает оценку не ниже 4 баллов. Какова вероятность, что курсант сдал зачет, если вероятность для него получить оценку 5 баллов считается равной 0,3, а получить оценку 4 — 0,5?

**1455.** Из колоды карт отобраны короли (К), дамы (Д) и валеты (В). Эти карты перетасованы. Три карты наугад извлекают одна за другой и последовательно выкладывают в ряд.

Пусть событие $A_1$ означает, что выложены карты КДВ, $A_2$ — выложены карты КВД, $A_3$ — выложены карты ДКВ.

Какова вероятность наступления события:

а) $A_1$; б) $A_1 \cup A_2$; в) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$?

**1456.** В скачках участвуют три лошади под номерами 1, 2 и 3. На основании предыдущих выступлений шансы победить у лошади под номером 3 вдвое меньше, чем у лошадей под номерами 1 и 2. Какова вероятность того, что первой придет лошадь под номером 1 или под номером 3?

**1457.** Два спортсмена стреляют одновременно по движущейся мишени. Мишень поражена, если в нее попал хотя бы один из спортсменов. Найдите вероятность поражения мишени, если вероятность попадания в нее первого спортсмена равна 0,75, а второго — 0,8.

**1458.** Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность попадания в мишень при 4 независимо произведенных выстрелах?

## Задачи повышенной трудности

**1459.** Докажите, что из равенства

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$$

следует равенство

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^b},$$

где $n$ — нечетное натуральное число.

**1460.** Постройте график функции:

а) $y = \left|\left||x-1|-2\right|-3\right|$;  б) $y = \left|\left||x+6|+1\right|-4\right|$.

**1461.** Постройте график функции:

а) $y = x - \{x\}$;  в) $y = x + \{x\}$;

б) $y = [x] + \{x\}$;  г) $y = [x] - \{x\}$.

**1462.** Решите уравнение:

а) $\dfrac{x}{x^2+3x+2} - \dfrac{x}{x^2+5x+2} = \dfrac{1}{24}$;

б) $\dfrac{x}{x^2-3x+1} - \dfrac{x}{x^2+x+1} = 2\dfrac{10}{13}$.

**1463.** Решите уравнение:

а) $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = \dfrac{10}{9}$;

б) $(x+5)^4 - 13(x+5)^2x^2 + 36x^4 = 0$.

**1464.** Решите относительно $x$ уравнение:

а) $\dfrac{x-ab}{a+b} + \dfrac{x-ac}{a+c} + \dfrac{x-bc}{b+c} = a+b+c$;

б) $\dfrac{x-a}{bc} + \dfrac{x-b}{ac} + \dfrac{x-c}{ab} = 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$.

**1465.** Докажите, что при любых значениях $a$, $b$ и $c$ уравнение

$$(x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) = 0$$

имеет корни.

**1466.** Решите неравенство:

а) $x^2 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} < \dfrac{5}{4}$;  б) $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x-2)^2} \leqslant 5$.

**1467.** При каких значениях $a$ верно при любом $x$ неравенство:

а) $\dfrac{ax}{x^2+4} < 1{,}5$;  б) $\dfrac{x^2+ax-1}{2x^2-2x+3} < 1$?

**1468.** При каких значениях $a$ любое значение функции $f(x) = \dfrac{3x^2+ax-6}{x^2-x+1}$ принадлежит промежутку $(-9;\ 6)$?

**1469.** Найдите:

а) все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению

$$2xy = x^2 + 2y;$$

б) все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению

$$x^4 - 4xy + y^4 + 2 = 0.$$

**1470.** Решите уравнение

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + y - 4\sqrt{y} + 7 = 0.$$

**1471.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x + y)(x^2 - y^2) = 9, \\ (x - y)(x^2 + y^2) = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$

**1472.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x - y)^5 + 6(x - y)^3 = 80, \\ x^2 - 3y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. \end{cases}$

**1473.** Существует ли такое двузначное число, которое при делении на сумму квадратов его цифр дает в частном 2 и в остатке 6, а при делении на произведение цифр дает в частном 4 и в остатке 6?

**1474.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \left(\dfrac{x - 2y}{x + 2y}\right)^3 + \dfrac{x - 2y}{x + 2y} = 10, \\ x^2 - 7xy + 3y^2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

**1475.** Найдите все тройки натуральных чисел, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + yz = 19. \end{cases}$$

**1476.** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1, \\ xy + xz + yz = 27; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + z = 8, \\ xy = -z^2. \end{cases}$

**1477.** Решите систему уравнений с параметром $a$:

а) $\begin{cases} 1 + \dfrac{xy}{a + 1} = a^2, \\ x + y = ay; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x - y}{a + 1} - a = 0, \\ x - y^2 = 0. \end{cases}$

**1478.** Решите систему уравнений с параметрами $a$ и $b$:

а) $\begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{x}{b - y} + \dfrac{b - y}{x} = \dfrac{5}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + \dfrac{b}{y} = 2, \\ \dfrac{b}{x} + ay = 2ab. \end{cases}$

**1479.** В арифметической прогрессии, составленной из четырех целых чисел, больший член равен сумме квадратов остальных членов. Найдите члены этой прогрессии.

**1480.** Пусть $(x_n)$ — арифметическая прогрессия, в которой $x_p = a$, $x_m = b$, $x_k = c$. Докажите, что

$$(m - k)a + (k - p)b + (p - m)c = 0.$$

**1481.** Три различных целых числа, сумма которых равна $-3$, составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

**1482.** Докажите, что если квадраты сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то треугольник, сторонами которого являются медианы данного треугольника, подобен данному.

**1483.** Известно, что $f(x)$ — линейная функция, а последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ — арифметическая прогрессия. Докажите, что последовательность $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ также является арифметической прогрессией.

**1484.** Найдите сумму первых $n$ членов последовательности

$$2,\ 22,\ 222,\ \ldots,\ \underbrace{22\ldots2}_{n\text{ раз}},\ \ldots.$$

**1485.** Найдите необходимое и достаточное условие того, что квадраты трех последовательных членов арифметической прогрессии, первый член которой равен $a$ и разность равна $d$, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

**1486.** Последовательности $(x_n)$ и $(y_n)$ заданы формулами $x_n = 2n - 1$, $y_n = n^2$. Если выписать в порядке возрастания все общие члены этих последовательностей, то получится последовательность $(z_n)$. Запишите формулу $n$-го члена последовательности $(z_n)$.

**1487.** В бесконечной геометрической прогрессии выделяют по порядку от ее начала группы, по $n$ членов в каждой группе. Докажите, что суммы членов этих групп образуют геометрическую прогрессию.

**1488.** Последовательность натуральных чисел разбита на группы

$$(1),\ (2, 3),\ (4, 5, 6),\ (7, 8, 9, 10),\ \ldots .$$

Найдите сумму чисел $n$-й группы.

**1489.** Докажите, что если $n \in N$ и $n > 2$, то верно неравенство $2^{\frac{n(n-1)}{2}} > n!$.

**1490.** Докажите, что при любом натуральном $n$, большем 1, верно неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}.$$

**1491.** Найдите значение выражения $x^3 - 3x$ при

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}}.$$

**1492.** Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8;$

б) $\sqrt[3]{(65+x)^2}+4\sqrt[3]{(65-x)^2}-5\sqrt[3]{4225-x^2}=0;$

в) $\dfrac{(29-x)\sqrt[3]{x-1}-(x-1)\sqrt[3]{29-x}}{\sqrt[3]{29-x}-\sqrt[3]{x-1}}=12.$

**1493.** Решите уравнение:

а) $\left(9+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(9-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=3\cdot 2^{\frac{1}{3}};$

б) $\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{1}{3}}-\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}=1.$

**1494.** Решите относительно $x$ уравнение:

а) $x-3\sqrt[3]{x}=a^3+\dfrac{1}{a^3}$, где $a\neq 0;$

б) $\sqrt[3]{(a+x)^2}-15\sqrt[3]{(a-x)^2}-2\sqrt[3]{a^2-x^2}=0.$

**1495.** Решите неравенство с параметром $a$:

а) $a\sqrt{x+1}<1;$ б) $(a+1)\sqrt{2-x}<1.$

**1496.** Докажите неравенство

$$\left(2\sqrt[4]{a}+2\sqrt[4]{b}+2\sqrt[4]{c}\right)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\leqslant 3.$$

**1497.** Докажите, что при любом натуральном $n$ верно неравенство

$$\frac{1}{2}<\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}}<1.$$

**1498.** Докажите, что при любом натуральном $n$, большем 2, верно неравенство

$$\sqrt[n]{n!}>\sqrt{n}.$$

**1499.** Выразите $\cos 2\alpha$ через $a$, если $\operatorname{tg}^2\alpha - a\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $a \geqslant 2$.

**1500.** Докажите, что если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы треугольника, причем $\gamma$ — тупой угол, то произведение тангенсов углов $\alpha$ и $\beta$ меньше 1.

**1501.** Докажите, что если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы треугольника, то верно равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

**1502.** Докажите, что:

а) $\operatorname{tg} 55° \cdot \operatorname{tg} 65° \cdot \operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg} 85°$;

б) $\operatorname{tg}^2 36° \cdot \operatorname{tg}^2 72° = 5$;

в) $\operatorname{tg} 9° - \operatorname{tg} 27° - \operatorname{tg} 63° + \operatorname{tg} 81° = 4$.

**1503.** Докажите, что если $\cos\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta = \operatorname{tg}\gamma$, $\cos\gamma = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы первой четверти, то

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = 2\sin 18°.$$

**1504.** Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = a$, найдите:

а) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; б) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

## Глава 1

**15.** Указание. Воспользуйтесь неравенствами $a + 1 \geqslant 2\sqrt{a}$, $b + 1 \geqslant 2\sqrt{b}$, $ab + 1 \geqslant 2\sqrt{ab}$. **16.** а) $(4; +\infty)$; б) $(1,5; +\infty)$. **29.** $(3 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$, $(3 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$. **32.** $\frac{1}{2(a-1)}$ при $a < 2$; $\frac{1}{2}$ при $a \geqslant 2$. а) 1; б) $\frac{1}{2}$. **38.** $f(-2) = 305$; $a = 3$. **39.** $g(-3) = -16$; $b = 27$. **43.** 2; −3. **44.** −2; 0; 5. **46.** −17; −8; 0. **52.** $x + 2 - \frac{6x - 9}{x^2 + 2x - 3}$. **53.** 5. Указание. Представьте подкоренное выражение каждого корня в виде квадрата. **58.** а) $E(y) = [-8; 8]$; б) $E(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$; в) $E(y) = [0; 4]$; г) $E(y) = [0; +\infty]$; е) $E(y) = (-\infty; 5)$. **61.** а) $f(1) = 3$; б) $f(1) = 3$; в) $f(1) = 4$; г) $f(7) = 5$. **62.** а) $g(3) = -2$; б) $g(2) = -1$; в) $g(1) = -4$; г) $g(0) = -3$. **64.** Существует: $y = kx + b$ при $k = 0$. **68.** а) 2; б) 1. **73.** (0; 0); (1; $a$). **76.** а) При $n = -8$; б) при $n = 10$. **77.** а) $m = 6$; б) $m = -4$. **79.** $y = 0,5(x - 4)^2 + 2$. **80.** а) $a = 1\frac{7}{9}$; б) $a = -0,5$; в) $a = 0,2$. **81.** а) (1; 3), (11; 243); б) $\left(0,25; 3\frac{15}{16}\right)$, (1,5; 1,75). **84.** $D(g) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. График функции — прямая $y = 2$ с исключенными точками (−1; 2) и (1; 2). **85.** в) $3(x - 2)^2 - 17$; г) $0,5(x + 3)^2 + 2,5$. **86.** а) 9; б) 4. **87.** $\frac{a-1}{a+1}$. **96.** а) При $c > 24$; б) при $c > -10$. **97.** а) При $c = 9$; б) при $c = 12$; в) при $c = 6$. **101.** 10 см. **102.** 6 см. **103.** $\frac{4}{x^2 - 6x + 5}$. **105.** 4; 9. **119.** а) [−5; 7], [−18; 10]; б) [−7; 5], [−10; 18]; в) [−7; 5], [−18; 10]. **120.** а) $y = 0$ при $x = -3$; 4; 6; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (4; 6)$; $y < 0$ при $x \in (-3; 4) \cup (6; +\infty)$; б) $y = 0$ при $x = -6$; −4; 3; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -6) \cup (-4; 3)$; $y < 0$ при $x \in (-6; -4) \cup (3; +\infty)$; в) $y = 0$ при $x = -6$; −4; 3; $y > 0$ при $x \in (-6; -4) \cup (3; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; -6) \cup (-4; 3)$. **124.** а) 5; −7; б) 5; −7. **125.** а) (8; −72); б) (−8; 72); в) (−8; −72). **129.** а) −3; −2; 2; 3; б) −7; 7; в) −7; −6; г) −4; 12. **130.** а) 0; б) 0. **132.** а) $7,62 < 2\sqrt{5} + \sqrt{10} < 7,65$; б) $1,29 < 2\sqrt{5} - \sqrt{10} < 1,32$. **133.** {2; 3; 4; 5; 6}. **136.** а) $D(f) = R$; $D(g) = R$; б) $E(f) = [0; +\infty]$; $E(g) = [-1; +\infty]$; в) $f(x) = 0$ при $x = 1$ и $x = 3$; $g(x) = 0$ при $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$; г) $f(x)$ возрастает при $x \in [-1; 2] \cup [3; +\infty)$; $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; 1) \cup [2; 3]$; $g(x)$ возрастает при $x \in [-3; 0] \cup [3; +\infty)$; $g(x)$ убывает при $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3]$. **137.** а) $D(y) = [-10; 16]$; $E(y) = [0; 7]$; б) $D(y) = [-16; 16]$; $E(y)$ определить невозможно. **139.** $|g(x)| = 0$ при $x = -5$

и $x = 1$; $|g(x)| > 0$ при $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 1) \cup (1; +\infty)$; $g(|x|) = 0$ при $x = -1$ и $x = 1$; $g(|x|) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $g(|x|) < 0$ при $x \in (-1; 1)$. **142.** $f(x) = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{x^2 - |x| + 1}$. **144.** $-3$; $-2$; $-1$; 1; 2; 3. **145.** $3a$. **146.** (0; 3).

**148.** $2x^2 + 2x - 1 = 0$. **154.** а) $x_0 = 3$; б) $x_0 = 2$. **159.** а) $-1$; 1; б) $-3$; 3. **161.** а) $E(f) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; б) $E(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; в) $E(f) = [1; 2]$; г) $E(f) = [2; 3)$. **162.** $20 \leqslant S \leqslant 27$. **163.** а) $g(0) = 0$ — наименьшее значение; наибольшего значения нет; б) $g(3) = \dfrac{1}{3}$ — наибольшее значение; наименьшего значения нет; в) $g(-\sqrt{3}) = g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 8$ — наибольшее значение; $g\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 7$ — наименьшее значение; г) $g(-9) = 0$ — наименьшее значение; наибольшего значения нет. **165.** $\varphi = |x + 2| + |x| + |x - 2|$. **167.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$.

**168.** а) При $|k| \geqslant 0{,}8$; б) при $|k| = 0{,}8$; в) при $|k| < 0{,}8$. **169.** При $p = -4$; б) при $p = 5$. **170.** а) При $a = 8$; б) при $a = -7$. **171.** а) $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$. **176.** а) $y = x^2 + 8|x| + 7$; б) $y = \dfrac{|x^3| + 3x - 1}{4|x| + 3}$; в) $y = \left|x - \dfrac{1}{2}\right| + \dfrac{1}{2}$; г) $y = |x - 3| + 3$.

## Глава 2

**192.** $a = 3$, $b = 7$. **196.** $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(1{,}5; 0)$. **198.** а) $-1$; $-3$; б) 1; $-1{,}5 - \sqrt{3{,}25}$; $-1{,}5 + \sqrt{3{,}25}$; в) 2; $-3$; г) 2; $-4$; 3. **199.** а) $-1$; б) $-2$; в) 1; $-1 - \sqrt{6}$; $-1 + \sqrt{6}$; г) 2; д) $-1$; е) 1; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **200.** а) 2; б) $-1$; $-2$; $\sqrt{2}$; 2; $-\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-1$; г) 1; 2. **201.** а) $-1$; 1; б) $-1$; 3. **202.** а) 2; $-2$; б) $-1$; 1; в) $-3$; 3. **203.** а) 3; б) 2; $-2$; 1; $-1$; в) $-1$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$. **204.** а) 3; $-7$; б) 4; $-2$; в) 2; $-8$ г) 3; $-5$. **207.** а) $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$; б) 1; $-2{,}5 - \sqrt{5{,}25}$; $-2{,}5 + \sqrt{5{,}25}$; в) $-2$; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{9 - \sqrt{65}}{4}$; $\dfrac{9 + \sqrt{65}}{4}$; г) корней нет. **208.** $a = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

**215.** $a = \dfrac{7}{6}$; $b = \dfrac{5}{12}$. **217.** а) 3; б) корней нет; в) 1; 11; г) $\dfrac{5}{9}$. **218.** а) 4,9; б) $2\dfrac{1}{3}$. **220.** а) $-3{,}5$; б) 4,5; в) 8; 0,8; г) 0; $-4{,}5$. **221.** а) 2; б) $\dfrac{1 + \sqrt{57}}{4}$; в) 1; г) 1. **222.** а) $-1$; $-3 - \sqrt{17}$; $-3 + \sqrt{17}$; б) 1; $\dfrac{-7 - \sqrt{13}}{6}$; $\dfrac{-7 + \sqrt{13}}{6}$; в) 0;

г) 1; $\frac{-4-\sqrt{6}}{5}$; $\frac{-4+\sqrt{6}}{5}$. **223.** а) $-2$; 1; б) 1. **224.** а) $-\frac{4}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 2; $-4$; б) $-2$; 6. **225.** а) 1; $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; 2. **226.** а) $-2$; 2; б) $-1$; 3. **227.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$. **228.** а) 0; б) 1; $-1$; в) $-5$; 2; г) $-1$; 3. **229.** а) $-3$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; б) $-2$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; в) $1-\sqrt{2}$; $-1+\sqrt{2}$. **230.** а) 2; $-\frac{1}{2}$; $3-\sqrt{10}$; $3+\sqrt{10}$; б) 1; 5. **234.** а) 0; б) 1. **239.** б) $\left[\frac{13-\sqrt{233}}{2}; \frac{13+\sqrt{233}}{2}\right]$. **240.** а) $a \leqslant -1{,}5$; б) $a \geqslant 1{,}6$. **242.** а) 0; б) 2. **243.** а) 0; б) $-2$. **244.** в) $(-\infty; -0{,}5) \cup (1{,}5; 2) \cup (2; +\infty)$; г) $(-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$; **245.** в) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$; г) $\left(0; \frac{4}{9}\right)$. **246.** а) 1; б) 3; 4; в) 3; 4; 5; г) 1. **247.** а) $(5; +\infty)$; б) $(0{,}5; 2{,}25)$. **248.** а) $x \in (-\infty; 5)$; б) $x \in (0; 4)$. **250.** а) $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (4; 8{,}5)$; б) $(-7{,}6; -3)$. **251.** а) $x \in \left(-\frac{7}{8}; +\infty\right)$; б) $m \in (-\infty; -6) \cup (1; +\infty)$. **252.** а) $b < -4$; б) $b > 1{,}5$. **254.** а) $-\frac{1}{3} < k < 0$; б) $-0{,}1 < k < 0$; в) $-\frac{1}{3} < k < 0$. **256.** б) $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right) \cup (0{,}3; 2{,}5)$; в) $[-6; 3{,}5] \cup [4; +\infty)$; г) $(-3; 0) \cup (0; 1{,}5)$; д) $(0; 6) \cup (6; 7{,}5)$; е) $(-\infty; -1{,}5) \cup (0; 1{,}6) \cup (1{,}6; +\infty)$. **258.** а) $a \leqslant -6$ или $a \geqslant 4$; б) $-7 \leqslant a \leqslant 5$. **259.** в) $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$; г) $[-\sqrt{15}; -\sqrt{11}] \cup [\sqrt{11}; \sqrt{15}]$; д) $(-\infty; 3]$; ж) $(-\infty; 4]$; з) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. **260.** а) $\left(-2; \frac{2}{7}\right) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -6) \cup (-1; 1)$; в) $(1; 2) \cup (2; +\infty)$; г) $(-\infty; -3) \cup (-1; 2)$. **261.** а) $(-\infty; 1) \cup (3; 8) \cup (8; +\infty)$; б) $(-\infty; 1) \cup (1; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$; в) $(-2; 2) \cup (2; 3)$; г) $(-0{,}5; +\infty)$. **262.** а) $[-4; 3]$; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup [6; +\infty)$. **263.** а) $[-19; 2]$; б) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; в) $[2; +\infty)$; г) $[3; +\infty) \cup \{1\}$. **266.** а) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 3; $-3$; б) 5; $-5$. **267.** а) 0; 45; б) 0; $-9$. **268.** а) Корней нет; б) корней нет. **269.** б) $(-\infty; -5) \cup (4{,}5; 6)$; в) $\left(-1\frac{2}{3}; 1{,}5\right) \cup (2; +\infty)$; г) $\left(-\frac{2}{11}; -\frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{4}{13}; +\infty\right)$. **270.** г) $(-8; -3{,}5] \cup [4; +\infty)$; д) $\left(1{,}5; -\frac{2}{3}\right) \cup [1; +\infty)$; е) $(-\infty; -4) \cup \left[\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right]$. **271.** а) $(-\infty; -3) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (1; 4)$; в) $(-3; -1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$; г) $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$; д) $(-\infty; 8) \cup \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup$

$\cup$ $[1;\ +\infty)$; е) $[1;\ 3)$. **272.** а) $[-3;\ 2] \cup (8;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -1) \cup [4;\ +\infty)$. **273.** а) $\left(0;\ 1\frac{1}{3}\right) \cup (2;\ +\infty)$. **274.** а) $-10 < a < 10$; б) $-6 < a < 6$. **275.** а) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{5}\right) \cup (0;\ 2)$; б) $(-6;\ -1) \cup [9;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; г) $(-2;\ 2)$. **276.** а) $(4;\ +\infty)$; б) решений нет; в) $(-2;\ -1] \cup (0;\ 0{,}6]$; г) $(-4;\ -0{,}16] \cup (0;\ 1)$. **277.** а) $(10;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -8) \cup (0;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -5{,}5) \cup (3{,}5;\ +\infty)$; г) $[0;\ 1]$. **278.** а) 2; 3; б) $-5$; $-4$; $-3$; $-2$; $-1$; 0. **279.** а) $a \geqslant 4$; б) $a \in (-\infty;\ -6{,}5) \cup (-4{,}4;\ -3) \cup (-3;\ +\infty)$. **280.** а) $x \in (-1;\ 1)$; б) $x \in \left[\frac{1}{7};\ 1\frac{2}{3}\right]$. **281.** г) 8. **283.** $a \geqslant -0{,}4$ или $a \leqslant -6$. **288.** а) $-1\frac{1}{3}$; 2; б) $\frac{1}{4}$; в) корней нет. **289.** а) $-1$; 1; б) $-3$; 3; $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; в) 2; 3; $\frac{5-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$; г) 0; 1. **292.** а) 1; 3; $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{11-\sqrt{41}}{20}$; $\frac{11+\sqrt{41}}{20}$. **293.** а) 2; $-3+\sqrt{13}$; б) 1; 4; в) 2; $7+\sqrt{57}$; г) $-5$; 1,5; $-2{,}5$; 1; д) 1; е) корней нет. **295.** а) 9; $-2-\sqrt{41}$; б) 2; $-3\frac{2}{3}$. **296.** а) $-1$; 1; $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; б) 1; $-1$; 2; $-2$; в) 3; $-3$; г) 2; $-2$. **298.** $[2;\ 3]$. **299.** а) 1; 9; б) $(-3;\ +\infty)$; в) 0; 2; г) $-1$; 7. **300.** а) 5; б) 3,5; в) 2; г) 0; $-3{,}2$. **301.** а) 4; б) $-9$; 1; $\sqrt{33}$. **302.** а) $-2$; б) $-1$. **304.** а) $-1$; 3; $\frac{1}{3}$; б) 1. **307.** а) $(3;\ 11)$; б) $(-\infty;\ -11{,}8) \cup (1{,}8;\ +\infty)$; в) $(-22;\ 24)$. **309.** а) $\left(-\infty;\ -\frac{7}{15}\right] \cup [1{,}8;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ -1\frac{1}{3}\right) \cup (1{,}5;\ +\infty)$; в) $\left(4\frac{2}{3};\ 10\right)$; г) $\left[2;\ 2\frac{4}{7}\right]$. **310.** а) $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; б) $(-1;\ 3)$; в) $\left(1-\sqrt{7};\ 1+\sqrt{7}\right)$; г) $(-\infty;\ -2) \cup (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$; **312.** а) $-2$; $-1$; 0; 1; 2; б) $-3$; $-2$; 2; 3; в) $-4$; $-3$; $-2$; $-1$; 0; г) $-1$; 0; 1; 2. **313.** а) $\left(-\infty;\ -1-\sqrt{6}\right)$; б) $(1;\ 3)$; в) $(0;\ 8)$; г) $(0;\ 2)$. **315.** а) $\left(-3-\sqrt{13};\ -2\right) \cup \left(-3+\sqrt{13};\ 2\right)$; б) $(-1;\ 2)$; в) $\left(3-\sqrt{5};\ 3+\sqrt{5}\right)$; г) $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$. **316.** а) $(-2;\ 3)$; б) $(-2;\ 9)$; в) $(-\infty;\ 1]$; г) $(-\infty;\ +\infty)$. **317.** а) $(-2;\ 2)$; б) $(-\infty;\ -4) \cup (4;\ +\infty)$; в) $(-3;\ 3)$; г) $(-5;\ 5)$. **318.** а) $\left(1-\sqrt{5};\ 2\right)$; б) $(-2;\ 3)$; в) $\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$; г) $(-4;\ 0{,}5)$. **319.** а) $(-0{,}5;\ +\infty)$; б) $(-5;\ -1) \cup (-1;\ 2)$. **320.** а) $\left(1;\ 2\frac{1}{3}\right) \cup \left(3;\ 4\frac{1}{3}\right)$; б) $(-1;\ 1) \cup (1{,}8;\ 3{,}8)$; в) $[3;\ 5] \cup [6;\ 8]$; г) $[4;\ 6] \cup [9;\ 11]$. **323.** а) $(-1;\ 0{,}9)$; б) $(-0{,}7;\ 1{,}3)$.

**324.** а) $[1; 2]$; б) $(0; 4)$; в) $(1,5; 2)$; г) решений нет. **325.** а) $\left(-\sqrt{11};\ 4\right)$; б) $(-1; 2,5)$.
**326.** а) $1$; $\frac{-1-\sqrt{57}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{57}}{2}$; б) $-1$; $1-\sqrt{6}$; $1+\sqrt{6}$. **331.** в) Любое число, если $p = 3$; нет корней, если $p = 0$; $\frac{p+3}{p}$, если $p \neq 0$ и $p \neq 3$; д) $a - 2$, если $a \neq -8$; любое число, если $a = -8$; е) любое число, если $b = 1$; нет корней, если $b = -1$; $\frac{b+5}{b-1}$, если $b \neq 1$ и $b \neq -1$. **332.** а) $\frac{3a}{2a+1}$, если $a \neq -\frac{1}{2}$, $a \neq 0$; корней нет, если $a = -\frac{1}{2}$; уравнение не определено (не имеет смысла), если $a = 0$; б) $\frac{a-2}{a-3}$, если $a \neq 3$, $a \neq 2$; решений нет, если $a = 3$; $a = 2$; д) $\frac{5a-5}{2+a-a^2}$, если $a \neq 1$, $a \neq -1$, $a \neq 2$; решений нет, если $a = 1$, $a = -1$, $a = 2$. **334.** а) $p < \frac{1}{6}$ или $p > \frac{1}{2}$; б) $p < \frac{1}{3}$. **335.** а) $a < -1$ или $a > 0$; б) $0 < a < \frac{1}{7}$. **336.** б) $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$; в) $a \neq -4$. **337.** б) $t = 0$, $t = 2\frac{1}{4}$; в) $t = 2$, $t = -2-\sqrt{12}$, $t = -2+\sqrt{12}$; г) $t = 0$. **338.** б) $b > 8$; в) $b < -\frac{4}{\sqrt{3}}$ или $b > \frac{4}{\sqrt{3}}$; г) $b > 5$. **341.** в) Любое число, если $a = 3$, корней нет, если $a \neq 3$; г) $0$, если $p = -4$; $\sqrt{p+4}$, $-\sqrt{p+4}$, если $p > -4$; корней нет, если $p < -4$; е) $\frac{1}{2}$, если $a = 0$; $1$, если $a = -2$; $\frac{-2-\sqrt{4+2a}}{a}$, $\frac{-2+\sqrt{4+2a}}{a}$, если $a \in (-2; 0) \cup (0; +\infty)$; корней нет, если $a < -2$; ж) $c$; $8 - c$; з) $-a$; $a + 6$.
**342.** а) Корней нет, если $a = 0$; $4$, если $a = -4$; $-a$; $4$, если $a \neq 0$, $a \neq -4$; б) корней нет, если $a \in (-\infty; 0] \cup (8; +\infty)$; $-\sqrt{\frac{24-3a}{a}}$, $\sqrt{\frac{24-3a}{a}}$, если $a \in (0; 8]$; в) корней нет, если $c = 0$, $c = 6$; $\frac{2-c}{12-2c}$, если $c \neq 0$, $c \neq 6$. **344.** а) Корней нет при $-\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{2y-\sqrt{4y^2-2}}{2}$, $\frac{2y+\sqrt{4y^2-2}}{2}$, если $y < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $y > \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) корней нет при $x = 0$; $\frac{2x^2+1}{4x}$ при $x \neq 0$. **345.** $a = -2$, $a = 4$.
**346.** $b \in (2; 3,5) \cup (3,5; 4)$. **347.** $p > 2$. **350.** а) $-a$ при $-2 < a < 2$; $-2$, $1$ при

$a = 2$; 2, $-1$ при $a = -2$; $-a$, $\dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, $\dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ при $a < -2$ или $a > 2$; б) $-1$ при $a < -\frac{1}{8}$; $-1$, $\frac{1}{2}$ при $a = -\frac{1}{8}$; $-1$, $\dfrac{1 - \sqrt{1 + 8a}}{2}$, $\dfrac{1 + \sqrt{1 + 8a}}{2}$ при $a > -\frac{1}{8}$. **351.** $b > -1$. **352.** а) $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $a > 3$. **355.** а) $-2$; 2; 6; б) $-7$; $-4$; 4; в) 1; г) $-1$. **356.** а) $(1,5; +\infty)$; б) $(-0,5; +\infty)$. **359.** а) $a + 1$ и $a - 1$ при $a \neq 1$, $a \neq -1$; корней нет при $a = 1$, $a = -1$; б) $a - 1$ и $a - 2$ при $a \neq 1$; $a \neq 2$; корней нет при $a = 1$, $a = 2$; в) $\dfrac{3 - 3a}{a - 5}$ при $a \neq 5$, $a \neq 3$; корней нет при $a = 5$, $a = 3$; г) $\dfrac{2 + 12a}{3a + 1}$ при $a \neq -\frac{1}{3}$, $a \neq -\frac{1}{4}$; корней нет при $a = -\frac{1}{3}$, $a = -\frac{1}{4}$. **360.** а) $\dfrac{3a}{2}$, $\dfrac{-2a}{3}$ при $a \neq 0$; корней нет при $a = 0$; б) $\dfrac{30 - 3a}{8 - a}$ при $a \neq 8$, $a \neq 9$; корней нет при $a = 8$, $a = 9$; в) $\dfrac{4a + 2}{3}$ при $a \neq -2$; корней нет при $a = -2$; г) $5b$, $b \neq 0$; корней нет при $b = 0$. **361.** а) $y - 1$ при $y \neq 0$; корней нет при $y = 0$; б) $x + 1$ при $x \neq -1$; корней нет при $x = -1$. **362.** $c = 1$, $c = -1$. **363.** $b > 6$. **365.** а) $-1$ при $a = 1$; $\dfrac{a + 1}{a - 1}$, $-1$ при $a \neq 1$; б) $a + 2$, $2a$ при $a \neq 0$; $-4$; 1; $-1$; 8 при $a = -4$; 3 при $a = 1$, 1 при $a = -1$; корней нет при $a = 0$. **366.** 3; 4. **367.** $\dfrac{b^2}{b^2}$, $-\dfrac{b^2}{b^2}$, при $a \neq 0$; корней нет при $a = 0$, $b = 0$. **368.** а) $a + b$, $a - b$ при $a \neq -b$; корней нет при $a = -b$; б) $\dfrac{a + b}{2}$ при $a \neq b$, корней нет при $a = b$. **369.** а) $-1\frac{4}{7}$; $2\frac{5}{7}$; $\frac{1}{7}$; 1; б) 4; $-2$. **370.** а) $x \in (-\infty; -3] \cup \left[1; 1\frac{1}{4}\right) \cup \left(1\frac{1}{4}; 2\right]$; б) $x \in (-\infty; -1] \cup [0; 1,5] \cup [5; +\infty)$. **373.** а) 2; б) 1; $\dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2}$; $\dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$; в) 1; $-2,5 - \sqrt{4,25}$; $-2,5 + \sqrt{4,25}$; г) $-1$; д) 5; е) $-1$; 1; 2. **376.** а) $-7$; 1; $-3 - \sqrt{6}$; $-3 + \sqrt{6}$; б) корней нет; в) $-1$; 6; г) $-1$; 5; $2 - \sqrt{8}$; $2 + \sqrt{8}$. **377.** а) 1; $-2$; 2; $-3$; б) корней нет. **379.** а) $-1$; 2; б) 1; $1\frac{2}{27}$. **380.** а) 3; б) $-\frac{1}{4}$; 2; в) 1; $-1\frac{14}{19}$; г) $-2$; 2. **381.** $-4$; 2; $-1 - \sqrt{3}$; $-1 + \sqrt{3}$. **382.** а) $-8$; б) $-11$; в) 0; г) $-16$. **383.** а) $\left(-\frac{2}{15}; \frac{4}{15}\right)$; б) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$. **384.** а) $a > \frac{1}{3}$; б) $a > 4$; в) $a > 1$; г) $a > 4$. **385.** а) $(0,4; 4)$; б) $[0; 0,4]$. **386.** $a \geqslant 12\frac{2}{3}$. **387.** $0,8 < m < 1$. **388.** а) $(-6; 6)$; б) $\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$; в) $\left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$;

г) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$; д) (1; 3); е) $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. **389.** а) $[2; +\infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup [-1; 0] \cup [2; +\infty)$; в) $[1; +\infty)$; г) $[-1; +\infty)$. **390.** При $a \leqslant -7{,}5$ и при $a \geqslant 2{,}7$. **391.** а) 0; б) 0. **392.** а) (1,5; 2); б) (1,5; 2); в) $(0; +\infty)$; г) $\left(-\sqrt{6}; -2\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(2; \sqrt{6}\right)$. **393.** а) $b \in \left(-\infty; -9\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $b \in (-\infty; -4) \cup (-4; -1{,}8) \cup (18; +\infty)$. **394.** а) 3; 4; б) −3; −2; −1; 0; 1; 2. **395.** а) −1,5; 1,5; б) −20; 2; 16; в) −1; г) 2; 11; $6{,}5 + \sqrt{64{,}25}$. **396.** −2; $-3 + \sqrt{61}$. **398.** а) $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; б) −3; 3. **399.** а) $(-3; -2) \cup (6; 9)$; б) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$. **400.** а) 4; б) 4. **401.** а) 2; 3; б) −1; 0; 1; 2. **402.** а) $(-\infty; -5) \cup (3; 4) \cup (5; +\infty)$; б) $(-1; 6) \cup (6; 8)$; в) $(-3; 2) \cup (8; +\infty)$; г) (−2; 1). **403.** а) (0,12; 0,2); б) решений нет. **404.** $a \geqslant 4$. **405.** а) 2; 3; 4; б) 1; 2; 3. **407.** $\frac{-3 - \sqrt{4m - 7}}{2}$ и $\frac{-3 + \sqrt{4m - 7}}{2}$ при $m \geqslant 1\frac{3}{4}$; корней нет при $m < 1\frac{3}{4}$. **408.** а) $\frac{10a + 25}{3}$, $\frac{65 - 10a}{3}$ при $a > 2$; 15 при $a = 2$; корней нет при $a < 2$; б) $\frac{-a - 2}{8}$, $\frac{a + 14}{2}$ при $a > -8$; 3 при $a = -8$; корней нет при $a < -8$. **411.** а) $a + 1$ при $a \neq \frac{3}{7}$; любое число при $a = \frac{3}{7}$; б) $a - b$ при $a \neq \frac{b}{2}$; любое число при $a = \frac{b}{2}$; в) $a + b$; $a - 2b$; г) $3a - 2b$, $2a - 3b$. **412.** а) $a$, $-a$, 2, −2 при $a \neq 0$; 0, 2, −2 при $a = 0$; б) $\sqrt{\frac{a}{8}}$, $-\sqrt{\frac{a}{8}}$, 1, −1 при $a > 0$; 0, 1, −1 при $a = 0$; 1, −1 при $a < 0$. **413.** $a$, $\frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}$, $\frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$ при $a < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$ при $a = \frac{1}{4}$; $a$ при $a > \frac{1}{4}$. **414.** $3 + a$, $3 - a$ при $a \neq 0$, $a \neq 1{,}5$, $a \neq -1{,}5$; любое число, кроме 0, при $a = 0$; корней нет при $a = -1{,}5$; 4,5 при $a = 1{,}5$. **415.** а) $2b + a$, $2b - a$ при $a \neq 2b$, $a \neq -2b$; б) $\frac{a - 1}{b - 1}$ при $b \neq 1$ и $a \neq 1$; корней нет при $b = 1$; любое число, кроме 1 и −1, при $a = b = 1$. **416.** $a = 0$, $b = 2$; $a = -2$, $b = 4$; $a = 2$, $b = -4$.

## Глава 3

**418.** а) (3; 4), (3; −1); б) (3; −1), (−4; −1). **420.** (19; 22), (61; 62). **430.** (8; −1), (8; 1), (12; 9), (12; −9), (32; 31), (32; −31), (−8; −1), (−8; 1), (−12; 9), (−12; −9), (−32; 31), (−32; −31). **433.** а) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; б) −1; 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. **443.** а) (−5; 1), $\left(-4\frac{1}{8}; -\frac{3}{4}\right)$; б) (2; −4), $\left(-2\frac{1}{6}; -5\frac{7}{18}\right)$; в) (1; −2); г) $\left(5\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

**444.** а) $(0;\ 0)$, $(-2{,}4;\ 4{,}8)$; б) $(6;\ 9)$, $(-9;\ -6)$; в) $\left(\frac{1}{4};\ 7\frac{3}{4}\right)$, $(-2;\ 1)$; г) $(17;\ 10)$, $(4;\ -3)$. **445.** а) $(1;\ 0)$, $(8;\ 21)$; б) $(3;\ 4)$, $(-4;\ -3)$. **446.** а) $(-2;\ -1)$; б) $(0;\ 3)$, $(2{,}4;\ -1{,}8)$. **447.** а) $(2;\ 2)$, $\left(-\frac{8}{19};\ -1\frac{12}{19}\right)$; б) $(-3;\ 2)$, $\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{2}\right)$; в) $\left(1\frac{2}{13};\ -\frac{10}{13}\right)$, $(1;\ -1)$, г) $(-1;\ 1)$, $\left(\frac{4}{5};\ -\frac{1}{5}\right)$. **448.** а) $(-2;\ 2)$, $\left(-11\frac{2}{3};\ -3\frac{4}{5}\right)$; б) $(0;\ -3)$, $(6;\ 13)$; в) $(3{,}8;\ 7{,}4)$, $(1;\ 1)$; г) $(2;\ -1)$. **449.** а) $(8;\ 4)$, $(4;\ 8)$; б) $(5;\ 1)$, $(-1;\ -5)$; в) $(1;\ 3)$, $\left(\frac{3}{5};\ 4\frac{1}{5}\right)$; г) $(19;\ 8)$; $\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$. **450.** а) $(2;\ 1)$, $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$; б) $(1;\ 1)$, $(1;\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$; в) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\ 1\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};\ 1\frac{1}{3}\right)$, $(-2;\ -2)$, $(2;\ -2)$; г) $(2;\ 4)$, $(-1;\ -14)$. **451.** а) $\left(-\frac{1}{2};\ 6\right)$, $(-2;\ 3)$; б) $\left(-\frac{1}{2};\ -5\right)$, $(-2;\ -2)$; в) $(3;\ 1)$, $\left(-\frac{1}{3};\ 11\right)$; г) $(4;\ -2)$, $(0;\ -6)$. **452.** а) $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$; б) $(3;\ 1)$, $(1;\ 3)$, $(-1;\ -3)$, $(-3;\ -1)$; в) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4};\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$; г) $\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$. **454.** а) $(-\infty;\ 7{,}5]$; б) $(-\infty;\ -4{,}5]$. **455.** а) $(-3;\ 3)$; б) $(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$. **456.** а) $(-1;\ -2)$, $\left(\frac{11}{9};\ \frac{22}{9}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$. **457.** а) $(-1;\ 2)$, $(2;\ -1)$, $(-1+\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3})$, $(-1-\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3})$; б) $(0;\ 2)$, $(2;\ 0)$. **458.** а) $(-3;\ 1)$, $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{89}}{16};\ \frac{5-\sqrt{89}}{32}\right)$; б) $(1;\ 1)$, $(3;\ 3)$. **459.** а) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(-2;\ 3)$, $(2;\ -3)$; б) $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$. **462.** а) $(0;\ 1)$; б) $(2;\ 3)$, $\left(-\frac{5}{4};\ -\frac{27}{4}\right)$. **463.** а) $(-2+\sqrt{2};\ -2-\sqrt{2})$, $(-2-\sqrt{2};\ -2+\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2})$, $(2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2})$; б) $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2};\ \frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right)$. **467.** 60 см. **468.** 3 и 4 см. **469.** 8 и 6 см/с. **470.** 8 и 6 см. **471.** 11 и 9, 11 и −9, −11 и 9, −11 и −9. **472.** 22,5 и 37,5 локтей. **473.** 6 и 8 см. **474.** 30 футов. **475.** 22 и 2 км/ч. **476.** 3 и 17 км/ч. **477.** 18 км, 6 км/ч. **478.** 45 км/ч. **479.** 15 и 30 км/ч. **480.** 6 чел., 5 ч. **481.** 21 и 25 ц, 7 и 6 га. **482.** 6 и 2. **483.** 7 и 5 см. **484.** 6, 8 и 10 см. **485.** 40 или 60 пистолей. **486.** 10%. **487.** 2000 р., 11%. **488.** Около 41%. **489.** 15 мин. **490.** 10 и 15 ч. **491.** 6 и 12 ч. **492.** 30 и 20 дней. **493.** 15 ч. **494.** 90 и 60 км/ч. **495.** 120 км/ч. **496.** 15 и 3 км/ч. **497.** 40 л. **498.** 12 и 18 ч. **499.** 10 л. **500.** 10 л. **501.** 2 л. **502.** 3000 р., 14%. **503.** 453. **504.** 40, 60 и 48 ч. **505.** а) $(1;\ 4)$; б) $(5;\ 5)$, $(-5;\ 5)$, $(\sqrt{11};\ -2)$,

$(-\sqrt{11}; -2)$. **517.** а) (2; 2), (2; −2); б) (0; −2), (1; 3). **518.** 4 и 6 см. **528.** а) (−6; −2), (6; 2); б) (−1; 3), (1; −3). **529.** а) Решений нет; б) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **534.** а) $a = -6$, $c > -\frac{4}{9}$; в) $a = -6$, $c < -\frac{4}{9}$; г) $a = -6$, $c = -\frac{4}{9}$. **546.** (0; 0).

**552.** а) $\frac{-1 \pm 2\sqrt{10}}{3}$; б) корней нет. **558.** а) (0; −2); б) (2; −4); в) $(2 + \sqrt{2}; -2 - \sqrt{2})$, $(2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2})$. **574.** а) 2; б) 4. **577.** а) (2; 3), (−2; 3); б) (−3; 3), (−3; −3); в) (2; 1), (−28; 469); г) (4; 1), $\left(5\frac{1}{2}; -2\right)$. **578.** а) (1; −2), (−1; −2); б) (4; 3), (4; −3), (−3; 4), (−3; −4); в) (3; 5), $\left(1\frac{3}{4}; -3\frac{1}{3}\right)$; г) (−2; −4), $\left(2\frac{3}{4}; 4\frac{7}{11}\right)$.

**579.** а) (3; −1), (1; −3), (−1; 3), (−3; 1); б) (5; −2), (2; −5), (−2; 5), (−5; 2); в) (4; −1), (−4; 1), $\left(\frac{1}{2}; -8\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 8\right)$; г) (2; −1), $\left(\frac{2}{3}; -3\right)$, (−2; 1), $\left(-\frac{2}{3}; 3\right)$.

**580.** а) (5; −2), (−2; 5), (−5; 2), (2; −5); б) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$.

**581.** а) (4; 4), (4; −4), (−4; 4), (−4; −4); б) (2; −4), (−2; 4); в) (1; 3), (1; −3), (−0,9; −2,7), (−0,9; 2,7); г) (6; 3), (−6; 3), $\left(5\frac{1}{3}; -2\frac{2}{3}\right)$, $\left(-5\frac{1}{3}; -2\frac{2}{3}\right)$.

**582.** а) $\left(1\frac{1}{5}; 4\frac{1}{5}\right)$, (−3; 0), $\left(2\frac{3}{5}; 1\frac{3}{5}\right)$, (−2; −3); б) $(4 + 2\sqrt{10}; -2\sqrt{10})$, $(4 - 2\sqrt{10}; 2\sqrt{10})$, (2; −4), (−6; 4). **583.** При $m \leqslant 24\frac{1}{12}$. **585.** а) $\left(1; \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}\right)$; б) (2; 5), $\left(\frac{1}{4}; 10\frac{1}{4}\right)$. **586.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$. **587.** $\frac{2}{3}$. **588.** $\frac{4}{6}$.

**589.** 15 и 20 см. **590.** 15, 30 и 30 см. **591.** 6 и 3 см. **592.** 15 и 10 ч или 12 и 12 ч. **593.** 20 и 30 ч. **594.** 12 и 18 км/ч. **595.** 10 и 15 км/ч. **596.** $a = 4$ и $b = 5$ или $a = -7\frac{1}{2}$ и $b = -2\frac{2}{3}$. **603.** а) При $m < -6$; б) при $m = -6$; в) при $m > -6$.

## Глава 4

**615.** в) $n = 7$; г) $n = 10$. **616.** в) $n = 2$, $n = 4$; г) $n = 2$. **617.** а) $n = 5$; 6; б) нет; в) $n = 1$; 2; 3; 4; 5; г) $n = 1$; 2; 3. **618.** $c_7 = 5{,}25$. **626.** $a_1 = 0$, $a_2 = -3$, $a_3 = -4$, $a_4 = -3$, $a_5 = 0$, $a_6 = 5$. **627.** $b_6 = 4$, $b_7 = 5\frac{2}{7}$. **628.** а) (−2; 2); б) $(-1; 1) \cup (5; +\infty)$. **629.** а) (4; 5), (5; 4), (−4; −5), (−5; −4); б) (3; 4), (4; 3). **639.** а) $a < 0$; б) $a$ — любое число; в) $a \geqslant 2$. **640.** а) При $a > 0$ — возрастающая, при $a < 0$ — убывающая; б) при $a > 10$ — убывающая, при $a < 10$ — возрастающая. **641.** а) $a_1 = 9$; б) $a_1 = 4$; в) не существует. **642.** а) $b_1 = 0{,}7$; б) $b_3 = 0$; в) не существует. **643.** а) (4; 1), (−4; 1); б) (−1; −3), (−1; 3). **644.** а) 2;

$-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; б) 3. **647.** б) $b_n > 140$ при $n > 14$. **648.** б) $c_n < 20$ при $n \geqslant 36$. **674.** $-1$. **676.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, $(-4; 0)$; б) $[0; 1]$, $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. **680.** $a_{13} = 41$, $b_5 = 41$. **681.** 14; 38; 62; 86; 110. **686.** С 13-го по 32-й. **687.** 18. **689.** $a_5 = -15$. **690.** $-15$; $-11$; $-7$; $-3$ или 3; 7; 11; 15. **693.** 2; $-2$. **695.** 3 км/ч. **696.** а) $(-\infty; -6) \cup (-1; 1) \cup (8; +\infty)$; б) $\left(-1\frac{1}{3}; 1\right)$. **698.** 396,9 м. **699.** 9 рядов.

**700.** а) 4905; б) 1665; в) $-363$; г) $-15$. **704.** а) $n = 18$, $a_{18} = 13{,}5$; б) $n = 12$, $a_1 = 20$. **705.** а) 364; б) 135,7. **706.** а) 44; б) 32. **707.** а) 8; б) 10. **708.** а) 96; б) 90. **709.** 35; 637. **710.** 7. **711.** 407,5. **713.** а) $a_1 = 16$, $d = -2$; б) $a_1 = 16$, $d = 4$. **714.** а) 13; б) 2. **715.** $a_1 = 25$, $d = -2$. **716.** $a_1 = 2$, $d = 3$ или $a_1 = -7\frac{3}{7}$, $d = 6\frac{27}{35}$. **717.** $a_1 = -14$, $d = 12$ или $a_1 = 4$, $d = 3$. **718.** а) $n = 16$; б) $n = 12$. **720.** а) (7; 2), (2; 7), (−7; −2), (−2; −7); б) (−5; 1), (0,2; 6,2), (5; −1), (−0,2; −6,2). **721.** При $a = 1$ и при $a > 2$. **724.** а) $12\sqrt{2}$; б) $-8$; в) 10; г) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$ или $b_1 = -8$, $q = -\frac{1}{2}$. **725.** Во втором банке больше примерно на 912 р. **726.** а) $n = 4$; б) $n = 6$; в) нет; г) нет. **727.** а) $n = 13$; б) $n = 9$. **730.** $a_9 = \frac{1}{4}$, $P_{13} = 1$. **731.** а) $x = 6$; б) $x = 24$ или $x = 12$. **735.** 26. **736.** 2; 8; 32 или 32; 8; 2. **737.** 448. **738.** 120; 60; 30; 15. **739.** 6; 30; 150; 750. **740.** 30. **744.** 2; 4; 8; 12. **745.** 7; 13; 19. **746.** 5; 15; 45 или 45; 15; 5. **747.** $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$. **750.** а) $(-3; 9)$; б) $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$. **751.** а) $-40\frac{4}{9}$; б) $\frac{521}{625}$; в) $14\frac{43}{108}$; г) $21\sqrt{2} + 21$. **752.** а) $n = 9$; б) $n \geqslant 10$. **754.** а) 65,6; б) 153,9. **756.** а) $n = 6$, $b_n = 16$; б) $n = 5$, $q = \frac{1}{3}$; в) $q = 3$, $b_3 = 55{,}8$ или $q = -4$, $b_3 = 99{,}2$. **757.** 5460. **758.** а) $\frac{63}{64}$; б) $-189$; в) 1098. **759.** а) $a_1 = 0{,}1$, $q = 2$, $n = 7$; б) $a_1 = 5$, $q = 0{,}2$, $n = 4$. **760.** $\frac{S_1}{S_2}$. **763.** $n = 6$. **764.** 6,2. **765.** 190,5. **766.** $q = 2$, $S_6 = 157{,}5$. **767.** 436,8. **768.** а) $(-4; 11)$; б) $(-\infty; -2) \cup (18; +\infty)$. **769.** При $x = -1{,}5$; $-4{,}5$. **781.** а) $(-1; 1) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (2; 4)$. **783.** а) $-70$; б) $-\sqrt{3}$; в) 42; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **784.** а) 1; б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $\frac{2}{9}$; г) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **786.** а) $\frac{13}{18}$; б) $\frac{1}{30}$; в) $1\frac{8}{99}$; г) $2\frac{5}{33}$. **787.** $a_1 = 6$, $q = \frac{2}{3}$. **789.** а) $4a(2 + \sqrt{2})$; б) $2a^2$; в) $\pi a(2 + \sqrt{2})$; г) $\frac{\pi a^2}{2}$. **790.** $q = \frac{5}{8}$. **791.** $b_1 = 1$, $q = \frac{2}{3}$. **792.** $a_1 = 6$, $q = \frac{1}{2}$. **793.** 48; 12; 3; $\frac{3}{4}$ и 48; 3; $\frac{3}{16}$; $\frac{3}{256}$. **794.** $a_1 = 14\frac{1}{16}$, $q = \frac{4}{5}$.

**795.** а) $-4$; 6; б) $-9$; 16. **796.** а) При $a > 2\frac{1}{4}$; б) при $2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$.

**802.** $d = 1{,}5$, **805.** 140. **809.** 666. **811.** $b_{10} = 127$. **812.** а) 2; б) 3. **813.** $S = \frac{(m+n-1)(m+n)}{2}$. **814.** $\frac{15p - 10m}{8}$. **817.** $a_1 = 4$, $q = 5$ или $a_1 = 100$, $q = \frac{1}{5}$. **819.** 3; 6; 12 или 12; 6; 3. **823.** а) $n = 9$; б) $n = 7$; 8. **824.** 6. **825.** 7.

**829.** $\lim a_n = \lim b_n = 0$; $\lim c_n = 2$. **830.** $a_1 = 48$, $q = \frac{3}{4}$ или $a_1 = 80$, $q = -\frac{1}{4}$.

**831.** $1\frac{40}{81}$.

## Глава 5

**834.** $E(g) = [0;\ 49]$; функция необратима. **835.** $E(f) = [0;\ 81]$; функция обратима. **838.** в) $y = 0{,}1x + 0{,}1$, где $19 \leqslant x \leqslant 79$; г) $y = -3x + 9$, где $2\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 4\frac{1}{3}$. **845.** а) $y = (x-1)^2 + 2$, где $x \leqslant 1$; б) $y = (x-1)^2 + 2$, где $x \geqslant 1$. **846.** 81. **847.** 84,6. **848.** а) $\left(1\frac{2}{3};\ 3\frac{1}{2}\right)$; б) $(-11;\ 5)$, $(7;\ 5)$. **849.** $\frac{a}{x}$.

**851.** б) $y = -\sqrt{x}$; г) $y = \sqrt[8]{x}$, где $x \geqslant 1$; д) $y = \sqrt[3]{x}$, где $x \in [-8;\ 8]$; е) $y = \sqrt[4]{x}$, где $x \in [0;\ 81]$. **855.** б) $E(f) = [0{,}5;\ 10]$; г) $E(f) = [-0{,}5;\ 2]$. **861.** б) $n = 7$; в) $n$ — любое натуральное число, большее 1; г) $n$ — любое нечетное натуральное число, большее 1. **863.** а) $(a-2)(a^2 + 2a - 1)$; б) $(b-1)(b+2)(b-3)$. **864.** $(0;\ 0)$, $(-2;\ -4)$, $(4;\ 2)$. **865.** $b_1 = 5$, $q = 2$ или $b_1 = 40$, $q = \frac{1}{2}$.

**867.** а) 21; б) 14; в) 2; г) 3. **870.** в) $b = \frac{1}{4}$; г) 2,5; д) 1; е) 1. **871.** а) $-a$; в) $xy$.

**875.** б) $-\sqrt[4]{3b^4}$; в) $\sqrt[3]{5c^3}$; г) $\sqrt[5]{x+1}$; д) $-\sqrt[6]{1-y^2}$. **876.** а) $2|a|b\sqrt{2b}$; б) $3ab\sqrt[3]{2ab^2}$; в) $\frac{a}{x^2}\sqrt[6]{12ay^2}$; г) $-b\sqrt{\frac{c}{2d}}$. **877.** а) $\sqrt{a}$; б) $\sqrt[8]{b^3}$. **878.** б) $\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right)^2$; в) $\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y}\right)^2$; г) $\left(\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{b}\right)^2$. **879.** а) $\left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}\right)^3$; б) $\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}\right)^3$.

**880.** б) $\frac{a\sqrt{a} + a\sqrt[4]{b} + \sqrt{ab} + \sqrt[4]{b^3}}{a-b}$; в) $\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a-b}$; г) $\frac{a\sqrt[3]{b^2} + b\sqrt[3]{a^2}}{a-b}$; д) $\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-x}$; е) $\frac{\sqrt[6]{y^5} + y\sqrt[6]{y} + y\sqrt{y}}{y - y^2}$. **881.** 1. **882.** а) $\sqrt{y} - \sqrt{x}$; б) $\frac{2\sqrt[4]{b} + 4}{\left(\sqrt[4]{b} - 1\right)^2}$; в) 1; г) $\sqrt[5]{y} + 2$. Указание к г). Представьте знаменатель первой дроби в виде $\sqrt[5]{y^4} + 4\sqrt[5]{y^2} + 16 = \sqrt[5]{y^4} + 8\sqrt[5]{y^2} + 16 - 4\sqrt[5]{y^2} = \left(\sqrt[5]{y^2} + 4\right)^2 - \left(2\sqrt[5]{y}\right)^2 =$

$= \left(\sqrt[5]{y^2} + 2\sqrt[5]{y} + 4\right)\left(\sqrt[5]{y^2} - 2\sqrt[5]{y} + 4\right)$ и сократите дробь, предварительно вынеся за скобки в числителе множитель $\sqrt[5]{y^3}$. **884.** б) $y = 1 - \sqrt{x - 1}$, где $x \in [1; +\infty)$. **886.** 2. **887.** 1; 2; 4 или 4; 2; 1. **891.** в) $(-6; +\infty)$; г) $(2; +\infty)$. **892.** а) $[0; 10]$; б) $[1; 9]$; в) $[0; 2]$; г) $[1; 3]$. **895.** а) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^2$; б) $(3^{0,25})^2$; в) $(2^{-0,75})^2$; г) $\left(\sqrt[6]{3,2}\right)^2$. **896.** а) $(a^{0,15})^2$; б) $(a^{0,1})^3$; в) $\left(a^{\frac{3}{70}}\right)^7$; г) $\left(a^{\frac{3}{10n}}\right)^n$. **898.** а) $8a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}$; б) $0,3^{-2}x^{0,4}y$; в) $\frac{2ab^{0,5}}{3}$. **899.** а) $\frac{a^{\frac{1}{2}} - 3}{a^{\frac{1}{2}} + 3}$; б) $\frac{x + x^{0,5}y^{0,5} + y}{x^{0,5}y^{0,5}}$; в) $\frac{x^{0,5} + y^{0,5}}{x^{0,5}}$; г) $b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$; д) $c^{0,4} - c^{0,2}d^{0,2} + d^{0,6}$; е) $\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$. **902.** а) $x^{0,2}$; б) $y^{\frac{3}{7}}$. **903.** а) $\frac{2a}{2 - a}$; б) $\frac{2(a-1)^{\frac{1}{2}}}{a - 2}$. **904.** 0. **905.** а) $4 \cdot 5^{n-1}$; б) $2 \cdot 3^n$. **906.** а) $a^{\frac{1}{4}} + 2$; б) $\frac{\left(b^{\frac{1}{4}} - 3\right)\left(c^{\frac{1}{4}} - 6\right)}{\left(b^{\frac{1}{4}} + 7\right)\left(c^{\frac{1}{4}} + 5\right)}$; в) $\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{2}} - 4\right)^2}$; г) $-4$. **907.** 0. **908.** а) $\sqrt{a}$; б) $\frac{8\sqrt{x}}{x}$; в) 1; г) $\frac{(a+b)^2}{4ab}$. **913.** а) 2; б) 2. **914.** б) $(-\infty; -5) \cup [2; 5)$. **915.** (1; 4); (4; 1). **917.** а) 6; б) 3; в) 8; г) 5; д) $\frac{2 - \sqrt{13}}{9}$; $\frac{2 + \sqrt{13}}{9}$; е) 0. **919.** а) 4; б) 4; в) 4; 7; г) 2,8. **920.** а) 3; б) 4; в) $-1$. **921.** а) 1; 6561; б) 625; в) 729; г) 64; 4096; д) $-2$; 6; 7; е) 2; ж) 3; з) 2. **922.** а) 0; 3; б) 4,5; в) $2\sqrt[7]{2}$; г) 8. **924.** а) 7; б) 5; в) 0; 2; г) 3; $\frac{3}{46}$. **925.** а) 5; 26; б) 10; 22. **926.** а) $-8$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$; 8; б) $-27$; 8. **927.** а) 1; б) $-2$. **928.** а) $-7$; 4; 5; б) $-2$; 3; в) $-9$; г) $-2$; 0; 2. **929.** а) 0; 4; б) 3; 11. **932.** Уравнение имеет положительный корень $-\frac{4}{a}$ при $a < 0$ и $\frac{3}{a}$ при $a > 0$. **934.** а) $[0; 25)$; б) $[16; +\infty)$; в) $[5; 9)$; г) $(35; +\infty)$. **935.** а) $(-10; -9] \cup [1; 2)$; б) $(-\infty; 0,5) \cup (5; +\infty)$; в) $[3; +\infty)$; г) $(7; 11)$. **937.** а) $[4; +\infty)$; б) $\varnothing$; в) $[4; +\infty)$; г) $(-\infty; -2] \cup \left[10\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **939.** а) $[2,5; 12)$; б) $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$; в) $[5; +\infty)$; г) $\left[\frac{5 + \sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$. **940.** а) $(1; 1296)$; б) $[0; 64) \cup (729; +\infty)$; в) $[0; 27)$; г) $(1; +\infty)$. **941.** а) $[0; 2)$; б) $[3; +\infty)$. **942.** а) $(4; 40) \cup (68; +\infty)$; б) $\varnothing$; в) $\left(0; \frac{43 + 5\sqrt{61}}{18}\right)$; г) $\left(0; 38 + 17\sqrt{5}\right)$.

**943.** а) $\left[\frac{1}{5}; 2\right]$; б) $[2{,}5; 3]$. **944.** а) $(-\infty; 3)$; б) $(-4; -3) \cup (3; 4)$; в) $[-3; -2] \cup$ $\cup$ $[7; 8]$; г) $\{-7; 8\}$. **946.** $\{-5; 5\}$. **947.** а) $[-4; 20)$; б) $(-\infty; -7] \cup (28; +\infty)$. **948.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; -16] \cup \{0\}$. **951.** $(-6; -2)$, $(6; 2)$, $\left(-4\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, $\left(4\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$. **953.** а) $y = \sqrt[3]{x} + 2$; б) $y = (x-1)^2 + 2$, где $x \geqslant 1$; в) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, где $x \neq 1$ и $x \neq -3$; г) $y = \sqrt{x+1}$, где $x \neq 0$. **957.** а) $f(g(x)) = x$, где $x \geqslant -4$; б) $f(g(x)) = x - 2$, где $x \geqslant 1$. **958.** а) $D(f) = \{x \mid x \in \boldsymbol{R},\ x \neq 2\}$; $E(f) = \{y \mid y \in \boldsymbol{R},\ y \neq 3\}$. **959.** а) $x = -2$; б) $x = -3$. **960.** $x = -6$. **968.** $a = -1$; $b = 1$. **970.** а) 1; б) $\sqrt[4]{436}$. **971.** а) $\sqrt{3} - 1$; б) $\sqrt{2} - 1$. **972.** $\underbrace{33\ldots3}_{n}$. Указание. Представьте подкоренное выражение в виде $\frac{1}{3}\left(\underbrace{11\ldots1}_{3n} - \underbrace{33\ldots3}_{2n} + \underbrace{33\ldots3}_{n}\right) =$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{10^{3n}-1}{9} - 3\cdot\frac{10^{2n}-1}{9} + 3\cdot\frac{10^{n}-1}{9}\right) = \frac{1}{27}(10^{3n} - 3\cdot 10^{2n} + 3\cdot 10^{n} - 1) =$$

$= \frac{1}{27}(10^n - 1)^3$. **973.** а) $-\sqrt[4]{5a^4b^4}$; б) $\sqrt[4]{3a^4b^4}$; в) $\sqrt[6]{2a^6b^6}$; г) $-\sqrt[6]{2a^6b^6}$.

**974.** а) $-3a\sqrt[3]{2a}$; б) $2b\sqrt[4]{3b}$; в) $-ab\sqrt[6]{-ab^2}$. **977.** б) $\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt{b} - 1\right)^2$. **978.** б) $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)^3$.

**979.** $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1}{\sqrt{xy}}$. **981.** а) 0,02; б) 5; в) 18; г) $\frac{2}{3}$. **983.** а) $x^{0,2}y^{0,2}$; б) $y$; в) $-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. **984.** $x$. Указание. Обозначить данное выражение буквой $a$ и обе части возвести в куб. Решив полученное уравнение относительно $x$, найдем, что $x = a$. **986.** а) 2; б) $-9$; в) 7; 8; г) $-8$; 18. **987.** а) $\frac{b+a}{b-a}$; б) $\frac{2}{a-1}$.

**990.** а) $2b^{\frac{1}{4}}$; б) $\frac{x + x^{\frac{1}{2}} + 3}{x^{\frac{1}{2}} + 3}$. **992.** а) $\left|\sqrt{a-4} + 2\right| + \left|\sqrt{a-4} - 2\right|$, если $4 \leqslant a \leqslant 8$, то 4; если $a \geqslant 8$, то $2\sqrt{a-4}$. **994.** а) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\varnothing$; в) $-1$; 0; 1; г) 1; 3. **995.** а) 7,5; б) 2; 3; в) $-2\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; г) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **996.** а) $(81; 1)$, $(1; 81)$; б) $(16; 9)$, $(9; 16)$; в) $(1; 4)$; г) $(41; 40)$. **997.** а) 3; б) 4; в) $-1$; 1; г) $-32$; 32. **998.** а) Указание. Подстановкой убеждаемся, что $x = 1$ не является корнем уравнения. При четном $n$ область определения уравнения $X = [-1; 1]$, при нечетном $n$ имеем $X = \boldsymbol{R}$. Разделив обе части уравнения на $\sqrt[n]{x^2 - 1}$, получим: $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}} = 4$. Положив $y = \sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}$, получим уравнение

$y^2 - 4y + 1 = 0$. Отсюда $y_1 = 2 - \sqrt{3}$, $y_2 = 2 + \sqrt{3}$. Выполнив обратную замену, находим: $x_1 = \dfrac{(2-\sqrt{3})^n + 1}{(2-\sqrt{3})^n - 1}$; $x_2 = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n + 1}{(2-\sqrt{3})^n - 1}$. При четном $n$ уравнение имеет один корень $x_1$, так как $x_2 > 1$; при нечетном $n$ — два корня: $x_1$ и $x_2$; б) $x = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 1}$, если $n$ — четное число, $x_1 = \dfrac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 1}$, $x_2 = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 1}$, если $n$ — нечетное число. **999.** а) $\frac{3}{4}$; б) 13; в) 4; 4; г) $[2; +\infty)$. **1000.** а) $(1; 8)$; $(8; 1)$; б) $(4; 1)$; $\left(-9; -\frac{9}{4}\right)$. **1001.** а) 1024; б) 64. **1002.** Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{63a}{64}$. **1003.** а) $\frac{25}{16}$. Указание. Умножьте обе части уравнения на $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ (по условию $x \neq 0$). Упростив, получим уравнение $2\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x-1}$; б) 25. **1004.** $(35; -29)$. **1005.** а) $(-\infty; -2] \cup \left[5; 5\frac{9}{13}\right)$; б) $(-\infty; -3]$. **1006.** а) $(-\infty; -1] \cup (0; 1)$; б) $[-3; 0) \cup [3; +\infty)$. **1007.** а) $(4; 5)$, если $n$ — четное число, $(4; +\infty)$, если $n$ — нечетное число; б) $(20; +\infty)$, если $n$ — четное число; $(19; +\infty)$, если $n$ — нечетное число. **1008.** $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **1009.** а) Если $a \leqslant 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $[2; a^2 + 2)$; б) если $a \leqslant 0$, то $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; если $a > 0$, то $\left[\frac{a^2+1}{3}; +\infty\right)$. **1010.** Если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $\left[-\frac{a}{\sqrt{5}}; a\right]$. **1011.** $\left(1; \frac{6-\sqrt{13}}{2}\right)$.

## Глава 6

**1044.** а) 2,5; б) 0,5; в) 4; г) $-\sqrt{3}$; д) 3; е) 2; ж) 6; з) 1. **1045.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 2; г) 0; д) $-\frac{1}{4}$; е) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; ж) $\frac{3}{4}$; з) $\frac{7\sqrt{3}}{6}$. **1046.** а) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; б) 1; в) 0; г) 0. **1048.** а) $-2$; б) 1. **1053.** а) 2; б) $-\frac{1}{2}$. **1055.** а) Нет; б) при $|a| < 1$; в) нет; г) да. **1059.** 10 и 15 ч. **1063.** а) 0; б) 0; в) $\sqrt{3}$; г) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **1084.** 12 км/ч. **1105.** а) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$;

б) $\frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$; г) $0 < x \leqslant \frac{\pi}{3}$. **1107.** а) $2\pi$; б) $\frac{40}{3}\pi$; в) $12\pi$; г) $\pi$. **1113.** $\frac{1}{2y}$. **1114.** Корней нет. **1123.** б) 0; в) 0; г) $2 \operatorname{ctg} \alpha$. **1124.** а) $-1$; б) $\sqrt{2} \cos \alpha$. **1125.** а) $-2 \sin^2 \alpha$; б) $2 \operatorname{tg}^2 \alpha$. **1126.** а) 0; б) $2 \sin^2 \alpha$; в) $2 \cos^2 \alpha$; г) $2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$. **1132.** а) 1; б) 1. **1133.** а) 8; б) 5 и $-9$. **1138.** а) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. **1140.** в) $x = \pi + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. **1145.** $x + y$. **1147.** з) $-\cos^2 \alpha$. **1152.** а) $2 \operatorname{ctg} \alpha$; б) $2 \operatorname{tg} \alpha$. **1159.** а) $2 \sin^2 \alpha - 1$; б) $\frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}$; в) $\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1}$; г) $\frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \operatorname{ctg} \alpha}$. **1166.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $-2\frac{3}{5}$; в) $-\frac{3}{7}$; г) 1,2. **1167.** а) 0,8; б) $-8$. **1168.** а) $\sin^2 \alpha$; б) $-\cos^2 \alpha$; в) $\frac{2\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$; г) $-\frac{2\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$. **1169.** а) $\operatorname{tg} \alpha$; б) $-\operatorname{ctg} \alpha$; в) $-\operatorname{tg} \alpha$; г) $\operatorname{ctg} \alpha$. **1172.** а) $\sin^2 \alpha$; б) $\cos^2 \varphi$; в) $-\sin^2 \gamma$; г) $-\cos^2 x$. **1178.** а) $m^2 - 2$; б) $1 - p^2$. **1180.** а) $x^2 = 1 + 2y$; б) $y^2 = 2 + x$. **1183.** а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. **1187.** а) $\frac{3 + 8\sqrt{2}}{15}$; б) $\frac{3 - 8\sqrt{2}}{15}$; в) $\frac{4 - 6\sqrt{2}}{15}$; г) $\frac{4 + 6\sqrt{2}}{15}$. **1188.** а) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. **1190.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$; в) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha\right)$; г) $\frac{1}{2}\left(\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha\right)$. **1192.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 0. **1193.** а) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1194.** а) $\cos \alpha$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$; в) $\sqrt{2} \cos \alpha$; г) $\frac{1}{2} \sin \alpha$. **1196.** а) $\cos \varphi$; б) $-\sin \gamma$; в) $\cos \alpha$; г) $\cos 2\gamma$. **1201.** 1. **1202.** $\frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$. **1204.** а) $x = \frac{7}{10}\pi + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = -\frac{4}{21}\pi + 2\pi n$, $x = -\frac{10}{21}\pi + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = 70° + 360°n$, $x = 160° + 360°n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = -20° + 360°n$, $x = 40° + 360°n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. **1206.** а) $2 - \sqrt{3}$; б) $2 + \sqrt{3}$; в) $-2 - \sqrt{3}$. **1208.** а) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$; б) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta$.

**1212.** а) 1; б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - 3}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$; в) 0; г) $\dfrac{2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$. **1216.** а) $1 - \operatorname{tg}\beta$; б) $\operatorname{tg}\beta$. **1217.** а) 2 и $-2$; б) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$; г) 2 и $-2$. **1221.** $a = 3$, $b = 12$; $a = -3$, $b = -12$. **1224.** $-\dfrac{24}{25}$; $\dfrac{7}{25}$; $-3\dfrac{3}{7}$. **1225.** $\dfrac{120}{169}$; $-\dfrac{119}{169}$; $-1\dfrac{1}{119}$. **1227.** г) $2\operatorname{tg}\alpha$. **1228.** а) $-(\cos x + \sin x)$; б) $2\sin\alpha$; в) $\cos\alpha$; г) 1; д) $\cos\alpha$. **1231.** а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$; б) $\cos\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2}$; в) $\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}2\alpha$; г) $\dfrac{1}{1 + \sin 2\alpha}$. **1234.** а) $-\cos 4°$; б) $\sin^2 12°$; в) $-\cos 20°$; г) $\cos 10°$. **1244.** а) 2 и 1; б) 1 и $\dfrac{1}{2}$. **1248.** (0; 0), $(-2; -4)$, $(3; -1{,}5)$. **1250.** а) $\cos 5°$; б) $\sqrt{3}\cos 70°$; в) $\sqrt{3}\cos 50°$; г) $\sin 48°$. **1251.** д) $\cos x$; е) $\sin\alpha$; ж) $\cos y$; з) $\sin\beta$. **1254.** б) $4\cos\left(30° - \dfrac{x}{2}\right)\cos\left(30° - \dfrac{x}{2}\right)$; е) $4\sin\dfrac{x - 45°}{2}\cos\dfrac{x + 45°}{2}$. **1255.** в) $\sin(60° - x)\sin(60° + x)$; г) $\sin(x + 45°)\sin(x - 45°)$. **1256.** е) $\sin 2a + \sin 2b$; ж) $-\dfrac{1}{2}\cos 2m + \dfrac{1}{2}\cos 2n$. **1258.** а) $\operatorname{ctg}2x$; б) $-\operatorname{tg}2x$; в) $-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; г) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. **1260.** а) $x = \dfrac{2}{3}\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, где $n \in Z$; б) $x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2\pi}{5}n$, $x = 2\pi n$, где $n \in Z$; в) $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. **1267.** $\dfrac{3}{7} \leqslant x \leqslant 1$. **1274.** а) $(m + n)^2$; б) $(x - y)^2$. **1277.** а) $-\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}$; б) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **1286.** а) 203°; б) 95°; в) $-140°$; г) 350°. **1287.** а) 0; б) 0; е) $-1$. **1289.** а) $\operatorname{ctg}^6\alpha$; б) $-\sin^2\alpha$; в) 2; г) $\sin\alpha - \cos\alpha$. **1291.** а) $\dfrac{1 - m^2}{2}$; б) $\dfrac{3m - m^3}{2}$. **1292.** $n^2 + 2$, $n(n^2 + 3)$. **1297.** а) 1; в) 3; г) 2,5. **1303.** а) $\dfrac{\sqrt{3} - m}{1 + m\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{1 + n\sqrt{3}}{n - \sqrt{3}}$. **1307.** а) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$; $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$; б) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$; в) $\dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$. **1321.** а) $2\cos\alpha\cos 2\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\alpha\sin 2\alpha$. **1328.** 1. **1329.** $\cos\dfrac{\alpha}{4}$.

## Глава 7

**1337.** а) 120; б) 5040. **1339.** 24. **1342.** 24. **1344.** а) 28; б) 42. **1345.** 48 способами. **1346.** $P_6 \cdot P_4 - 1 = 17\,279$. **1348.** 2664. **1349.** а) $a = 25$ при $n = 4$; б) $a = 121$ при $n = 5$. **1350.** а) $x = 7$; б) $x = 7$. **1352.** При $a < 1$. **1353.** $\left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{4}\right)$.

**1355.** $A_{10}^3 = 720$. **1356.** 1680. **1359.** 151 200. **1360.** 95 040. **1361.** а) 280; б) 720; в) 10. **1362.** а) 24; б) 24; в) 12; г) 12. **1363.** $A_7^1 + A_7^2 + A_7^3 = 259$. **1364.** а) $n = 3$; б) $n = 6$. **1365.** 1. **1366.** $3^{12} = 531\,441$. **1367.** а) $5 + 2\sqrt{6}$; б) 8. **1370.** $C_6^2 = 15$. **1371.** $C_{10}^2 = 45$. **1372.** $C_{12}^2 - 12 = 54$. **1373.** $C_{17}^8 = 24\,310$. **1374.** $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$; $1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 27$. **1376.** а) $2^8$; б) $2^{10}$. **1377.** $C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9 = 502$. **1378.** а) 6; б) 4. **1379.** $C_{12}^3 = 220$. **1380.** а) $n = 6$; б) $n = 7$; в) $x = 10$; г) $x = 11$. **1381.** 17 человек. **1382.** $n = 1$; 2; 3; 4; 5. **1386.** 102. **1388.** в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{5}{6}$. **1390.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{5}$; в) 0,3; г) 0,7.

**1391.** $\frac{19}{25}$. **1392.** а) $\frac{1}{45}$; б) $\frac{1}{15}$; в) $\frac{2}{9}$. **1393.** $C_8^2 : C_{12}^2 = \frac{14}{33}$. **1394.** а) $\frac{3}{28}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{14}$. **1395.** $\frac{1}{6}$. **1396.** $\frac{1}{8}$. **1397.** $\frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}$. **1398.** $\frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2}$.

**1399.** а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{4}{9}$. **1400.** $\frac{5}{36}$. **1403.** а) $[-2\pi; -\pi] \cup [0; \pi] \cup \{2\pi\}$; б) $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \{2\pi\}$; в) $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \{2\pi\}$.

**1404.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$. **1405.** 0,7. **1406.** а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{23}{24}$. **1407.** а) $\frac{1}{18}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{5}{18}$; г) $\frac{2}{3}$. **1408.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{7}{9}$; г) $\frac{5}{9}$. **1409.** $\frac{16}{121}$. **1410.** $1 - \frac{C_4^2}{C_{16}^2} = \frac{19}{20}$.

**1411.** 0,28. **1413.** $[-0{,}3; 1)$. **1415.** $\frac{9}{25}$. **1416.** $\frac{1}{12}$. **1417.** $\frac{1}{4}$. **1418.** 0,5894.

**1419.** а) 0,912; б) 0,998. **1420.** 0,98. **1421.** $\frac{1}{16}$. **1422.** $\frac{5}{144}$. **1423.** $\frac{1}{24}$.

**1424.** 1; 4; 7. **1425.** (3; 0), (3; −2). **1426.** а) $\varnothing$; б) 5. **1427.** 600. **1428.** 10!. **1429.** 360. **1430.** $13! \cdot 5!$. **1431.** $6! \cdot 10!$. **1432.** а) 120; б) 240. **1433.** 27. **1434.** 64. **1435.** 243. **1436.** $A_{16}^6$. **1437.** $2(n-1)!$. **1438.** а) $3P_5 = 360$; б) $A_3^2 \cdot P_4 = 144$. **1439.** 1440. $A_5^3 \cdot A_4^3$. **1440.** 8!. **1441.** $C_{25}^{12}$. **1442.** 210 членов. **1443.** $n = 15$. **1444.** $\frac{1}{2}$. **1445.** $1 - \frac{C_{10}^5}{C_{100}^5} \approx 0{,}04$. **1446.** $\frac{11}{12}$. **1447.** 0,88.

**1449.** $\frac{C_7^2}{C_{28}^2} = \frac{1}{18}$. **1450.** $\frac{1}{2}$. **1451.** а) $\frac{C_{10}^2 \cdot C_5^1}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}$; б) $\frac{C_{10}^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}$.

**1452.** $\frac{11}{19}$. **1453.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $\frac{17}{30}$. **1454.** 0,8. **1455.** а) $P(A_1) =$

$= \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{8}{165}$; б) $P(A_1 \cup A_2) = \frac{16}{165}$; в) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{8}{55}$.

**1456.** 0,6. **1457.** 0,95. **1458.** $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{609}{625} \approx 0,97$.

### Ответы к задачам повышенной трудности

**1459.** Указание. Приведите равенство к виду $(a + b)(a + c)(b + c) = 0$. Аналогичным образом преобразуйте второе равенство. **1462.** а) 1; 2; $\frac{-11 - \sqrt{113}}{2}$; $\frac{-11 + \sqrt{113}}{2}$. Указание. Разделите числитель и знаменатель каждой дроби на $x$; б) 3; $\frac{1}{3}$. **1463.** а) Указание. Прибавьте к обеим частям уравнения по $\frac{2x^2}{x^2 - 1}$; б) $-\frac{5}{3}$; 5; $-\frac{5}{4}$; $\frac{5}{2}$. Указание. Замените $x + 5$ на $a$ и решите относительно $x$ получившееся биквадратное уравнение. **1464.** а) $x = ab + ac + bc$, если $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \neq 0$; $x$ — любое число, если $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = 0$. Указание. Перенесите все члены уравнения в левую часть и сгруппируйте попарно; б) $x = a + b + c$, если $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{b+c} \neq 0$; $x$ — любое число, если $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{b+c} = 0$. Указание. Перенесите все члены уравнения в левую часть и представьте ее в виде суммы трех слагаемых. **1465.** Указание. Представьте уравнение в виде квадратного и преобразуйте его дискриминант. **1466.** а) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; б) $[-2; 1]$. **1467.** а) $a \in (-6; 6)$; б) $a \in (-6; 2)$. **1468.** $a \in (-3; 6)$. **1469.** а) (2; 2); б) (1; 1), (−1; −1). **1470.** $\left(-\sqrt{3}; 4\right)$. **1471.** а) (2; 1), (−1; −2); б) (2; 1), (1; 2), (−3; 0), (0; −3), (1; −2), (−2; 1). **1472.** а) $\left(\frac{6 + \sqrt{10}}{2}; \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)$; $\left(\frac{6 - \sqrt{10}}{2}; \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)$. Указание. Обозначьте $x - y$ буквой $z$ и воспользуйтесь монотонностью функции $f(z) = z^5 + 6z^3$; б) (0; 0); $\left(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\right)$. Указание. Вычитая из первого уравнения второе, получите уравнение $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2) = 0$ и докажите, что второй множитель в левой части этого уравнения принимает при любых $y$ положительные значения. **1473.** Не существует. **1474.** а) (6; −1); (−6; 1); б) (6; 6); $\left(1{,}5\sqrt{5} - 1{,}5; -1{,}5\sqrt{5} - 1{,}5\right)$; $\left(-1{,}5\sqrt{5} + 1{,}5; 1{,}5\sqrt{5} - 1{,}5\right)$. Указание. Приведите уравнение к целому виду и введите переменные $u = x + y$, $v = xy$.

**1475.** (5; 2; 7), (5; 7; 2), (7; 3; 4), (7; 4; 3). **1476.** а) (3; 3; 3); б) (−8; 8; 8), (8; −8; 8). **1477.** а) $(a^2 - 1;\ a + 1)$ при $a \neq \pm 1$, решений нет при $a = \pm 1$. **1478.** а) $(2a - 2b;\ 2b - a)$, $(b - a;\ 2a - b)$ при $a \neq b$, решений нет при $a = b$; б) $\left(\frac{1}{a};\ b\right)$ при $ab \neq 0$, решений нет при $ab = 0$. **1479.** −1, 0, 1, 2 или 2, 1, 0, −1. **1480.** Указание. Выразите $b - c$ через $m$, $k$ и $d$; $c - a$ через $k$, $p$ и $d$; $a - b$ через $p$, $m$ и $d$, где $d$ — разность прогрессии. **1481.** −4, 2, −1 или −1, 2, −4. **1482.** Указание. Достройте данный треугольник до параллелограмма. **1484.** $\frac{20(10^n - 1) - 18n}{81}$. Указание. Преобразуйте выражение $9S$, где $S$ — искомая сумма. **1485.** $d = 0$ или $d = a\left(-2 \pm \sqrt{2}\right)$. **1486.** $z_n = (2n - 1)^2$. **1487.** Указание. Пусть выделены три последовательные группы, содержащие по $n$ членов, $S'$, $S''$, $S'''$ — суммы их членов. Обозначив буквой $a$ число, с которого начинается первая группа, а буквой $q$ — знаменатель прогрессии, найдите $S'$, $S''$, $S'''$ и сравните отношения $\frac{S''}{S'}$ и $\frac{S'''}{S''}$. **1488.** $\frac{n(n^2 + 1)}{n}$. **1489.** Указание. Представьте показатель степени в виде суммы первых $n$ натуральных чисел. **1490.** Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции. **1491.** $2\sqrt{2}$. Указание. В выражении для $x$ замените сумму дробей дробью. **1492.** а) 4; 548; б) 0; 63. Указание. Разделите обе части уравнения на $\sqrt[3]{(63 - x)^2}$; в) 2; 28. Указание. Введите переменные $u = \sqrt[3]{29 - x}$ и $v = \sqrt[3]{x - 1}$ и решите систему $\begin{cases} u + v = \frac{12}{uv}, \\ u^3 + v^3 = 28. \end{cases}$

**1493.** а) 49; б) $1\frac{1}{27}$. **1494.** а) 8; −1 при $a = 1$; −8; 1 при $a = -1$; $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3$ при $a \neq \pm 1$. Указание. Используйте тождество $m^3 + n^3 = (m + n)^3 - 3mn(m + n)$; б) $\frac{62a}{63}$. Указание. Разделите обе части равенства на $\sqrt[3]{a^2 - x^2}$ и введите переменную $y = \sqrt[3]{\frac{a + x}{a - x}}$. **1495.** а) $[-1; +\infty)$ при $a \leqslant 0$; $\left(-1;\ \frac{1}{a^2} - 1\right)$ при $a > 0$; б) $(-\infty; 2]$ при $a \leqslant -1$; $\left(2 - \frac{1}{(a + 1)^2};\ 2\right]$ при $a > -1$.

**1496.** Указание. Перенесите все члены в правую часть и представьте ее в виде суммы квадратов. **1497.** Указание. Представьте подкоренное выражение в виде произведения дробей. **1498.** Указание. Представьте $(n!)^2$ в виде $(1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n - 1)) \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot 2 \cdot (n - 1)$ и воспользуйтесь тем, что $k(n - k + 1) \geqslant n$. **1499.** $\frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}$. **1503.** Указание. Исключив функции углов $\beta$ и $\gamma$, придите к уравнению $\sin^4 - 3\sin^2 + 1 = 0$.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## С



## Т



## У



## Ф



## Ч



## Ш

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## МЕТОДИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Данный учебник завершает курс алгебры для учащихся 7, 8 и 9-го классов с *углубленным* изучением математики. Содержание всего курса, и учебника «Алгебра—9» в частности, полностью соответствует современным образовательным стандартам, а также включает в себя широкий круг дополнительных вопросов. Подробные объяснительные тексты позволяют учащимся успешно изучать материал учебника даже самостоятельно, а обилие практического материала — прочно отрабатывать приемы решения различных заданий, среди которых немало задач повышенной сложности.

Методической особенностью курса является *расширение традиционных учебных тем* за счет теоретико-множественной, вероятностно-статистической и историко-культурной линий. Обращение к теоретико-множественному подходу в изложении некоторых вопросов связано не только с требованиями программы углубленного изучения математики, но и с удобством такого подхода при введении, например, функции как соответствия между множест вами, равносильности уравнений и т. п. Новые стандарты математического образования заставляют иначе взглянуть на статистику, комбинаторику и теорию вероятностей. Этот материал, достаточно подробно изложенный в учебниках 7—9-го классов, по мнению авторов, должен органично вплестись в общую канву изложения традиционного материала, не выделяясь в отдельный школьный предмет.

Специфической особенностью учебников «Алгебра» для 7—9-х классов является введение в объяснительные тексты исторического материала, а в практический материал — задач из далекого прошлого. Авторы уверены, что наличие элементов историзма в учебнике сделает его более привлекательным для учащихся, даст возможность учителю чаще обращать внимание школьников на общекультурное значение математики. Естественно, без дополнительных рассказов учителя и докладов, сообщений учащихся на уроках у школьников не может сложиться целостной картины развития математики.

Учебник «Алгебра—9» содержит самые разнообразные по степени сложности упражнения. Зная возможности учащихся, учитель может какие-то задачи пропустить, а какие-то предложить только сильным ученикам. К этим задачам можно будет вернуться позже, во время итогового повторения. Добавим, что количество задач учебника — избыточное, и для формирования у школьников стойких умений и навыков решение всех задач не обязательно. Более того, некоторый теоретический материал также можно не рассматривать или рассматривать в ознакомительном плане.

В издательстве «Мнемозина» планируется выпуск дидактических материалов с краткими методическими комментариями для учителя к данному учебнику, а также «Книги для учителя». Тем не менее ниже приводится примерное поурочное планирование для работы в 9-м классе, рассчитанное на **5 уроков алгебры в неделю.** В этом планировании отсутствует традиционное для начала учебного года повторение: элементы этого повторения включены в учебный материал всего учебного года. В конце каждой главы перед контрольной работой запланирован один урок для обобщения изученного материала, обозначенный как урок решения дополнительных упражнений к главе.

## ПРИМЕРНОЕ ПОУРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

### 5 часов в неделю, всего 170 часов

| № урока | Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|---|---|
| | **Глава 1. Функции, их свойства и графики (22 ч)** | |
| | **§ 1. Свойства функций (10 ч)** | |
| 1, 2 | Возрастание и убывание функций (п. 1) | 2 ч |
| 3, 4 | Свойства монотонных функций (п. 2) | 2 ч |
| 5 | *Самостоятельная работа № 1* | 1 ч |
| 6, 7 | Четные и нечетные функции (п. 3) | 2 ч |
| 8, 9 | Ограниченные и неограниченные функции (п. 4) | 2 ч |
| 10 | *Самостоятельная работа № 2* | 1 ч |
| | **§ 2. Квадратичная функция (5 ч)** | |
| 11, 12 | Функции $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$ и $y = (x - m)^2$ (п. 5) | 2 ч |
| 13, 14 | График и свойства квадратичной функции (п. 6) | 2 ч |
| 15 | *Самостоятельная работа № 3* | 1 ч |
| | **§ 3. Преобразования графиков функций (7 ч)** | |
| 16, 17 | Растяжение и сжатие графиков функций к оси ординат (п. 7) | 2 ч |
| 18, 19 | Графики функций $y = \|f(x)\|$ и $y = f(\|x\|)$ (п. 8) | 2 ч |
| 20 | *Самостоятельная работа № 4* | 1 ч |

*Продолжение таблицы*

| № урока | Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|---|---|
| 21 | Решение дополнительных упражнений к главе 1 | 1 ч |
| 22 | *Контрольная работа № 1* | 1 ч |
| | **Глава 2. Уравнения и неравенства с одной переменной (29 ч)** | |
| | **§ 4. Уравнения с одной переменной (9 ч)** | |
| 23, 24 | Целое уравнение и его корни (п. 9) | 2 ч |
| 25—27 | Приемы решения целых уравнений (п. 10) | 3 ч |
| 28—30 | Решение дробно-рациональных уравнений (п. 11) | 3 ч |
| 31 | *Самостоятельная работа № 5* | 1 ч |
| | **§ 5. Неравенства с одной переменной (6 ч)** | |
| 32—34 | Решение целых неравенств с одной переменной (п. 12) | 3 ч |
| 35, 36 | Решение дробно-рациональных неравенств с одной переменной (п. 13) | 2 ч |
| 37 | *Самостоятельная работа № 6* | 1 ч |
| | **§ 6. Уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля (6 ч)** | |
| 38, 39 | Решение уравнений с переменной под знаком модуля (п. 14) | 2 ч |
| 40—42 | Решение неравенств с переменной под знаком модуля (п. 15) | 3 ч |
| 43 | *Самостоятельная работа № 7* | 1 ч |
| | **§ 7. Уравнения с параметрами (8 ч)** | |
| 44—46 | Целые уравнения с параметрами (п. 16) | 3 ч |
| 47, 48 | Дробно-рациональные уравнения с параметрами (п. 17) | 2 ч |
| 49 | *Самостоятельная работа № 8* | 1 ч |
| 50 | Решение дополнительных упражнений к главе 2 | 1 ч |
| 51 | *Контрольная работа № 2* | 1 ч |
| | **Глава 3. Системы уравнений и системы неравенств с двумя переменными (20 ч)** | |
| | **§ 8. Уравнения второй степени с двумя переменными и их системы (11 ч)** | |
| 52 | Уравнение с двумя переменными и его график (п. 18) | 1 ч |
| 53 | Система уравнений с двумя переменными (п. 19) | 1 ч |

*Продолжение таблицы*

| № урока | Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|---|---|
| 54, 55 | Решение систем уравнений с двумя переменными способом подстановки и способом сложения (п. 20) | 2 ч |
| 56 | *Самостоятельная работа № 9* | 1 ч |
| 57, 58 | Другие способы решения систем уравнений с двумя переменными (п. 21) | 2 ч |
| 59—61 | Решение задач (п. 22) | 3 ч |
| 62 | *Самостоятельная работа № 10* | 1 ч |
| | **§ 9. Неравенства с двумя переменными и их системы (9 ч)** | |
| 63 | Линейное неравенство с двумя переменными (п. 23) | 1 ч |
| 64 | Неравенство с двумя переменными степени выше первой (п. 24) | 1 ч |
| 65, 66 | Система неравенств с двумя переменными (п. 25) | 2 ч |
| 67, 68 | Неравенства с двумя переменными, содержащие знак модуля (п. 26) | 2 ч |
| 69 | *Самостоятельная работа № 11* | 1 ч |
| 70 | Решение дополнительных упражнений к главе 3 | 1 ч |
| 71 | *Контрольная работа № 3* | 1 ч |
| | **Глава 4. Последовательности (26 ч)** | |
| | **§ 10. Свойства последовательностей (8 ч)** | |
| 72,73 | Числовые последовательности. Способы задания последовательностей (п. 27) | 2 ч |
| 74, 75 | Возрастающие и убывающие последовательности (п. 28) | 2 ч |
| 76 | Ограниченные и неограниченные последовательности (п. 29) | 1 ч |
| 77, 78 | Метод математической индукции (п. 30) | 2 ч |
| 79 | *Самостоятельная работа № 12* | 1 ч |
| | **§ 11. Арифметическая прогрессия (5 ч)** | |
| 80, 81 | Арифметическая прогрессия. Формула $n$-го члена арифметической прогрессии (п. 31) | 2 ч |
| 82, 83 | Сумма первых $n$ членов арифметической прогрессии (п. 32) | 2 ч |
| 84 | *Самостоятельная работа № 13* | 1 ч |

*Продолжение таблицы*

| № урока | Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|---|---|
| | **§ 12. Геометрическая прогрессия (6 ч)** | |
| 85—87 | Геометрическая прогрессия. Формула $n$-го члена геометрической прогрессии (п. 33) | 3 ч |
| 88, 89 | Сумма первых $n$ членов геометрической прогрессии (п. 34) | 2 ч |
| 90 | *Самостоятельная работа № 14* | 1 ч |
| | **§ 13. Сходящиеся последовательности (7 ч)** | |
| 91, 92 | Предел последовательности (п. 35) | 2 ч |
| 93, 94 | Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (п. 36) | 2 ч |
| 95 | *Самостоятельная работа № 15* | 1 ч |
| 96 | Решение дополнительных упражнений к главе 4 | 1 ч |
| 97 | *Контрольная работа № 4* | 1 ч |
| | **Глава 5. Степени и корни (17 ч)** | |
| | **§ 14. Взаимно обратные функции (5 ч)** | |
| 98, 99 | Функция, обратная данной (п. 37) | 2 ч |
| 100, 101 | Функция, обратная степенной функции с натуральным показателем (п. 38) | 2 ч |
| 102 | *Самостоятельная работа № 16* | 1 ч |
| | **§ 15. Корни $n$-ой степени и степени с рациональными показателями (6 ч)** | |
| 103, 104 | Арифметический корень $n$-ой степени (п. 39) | 2 ч |
| 105—107 | Степень с рациональным показателем (п. 40) | 3 ч |
| 108 | *Самостоятельная работа № 17* | 1 ч |
| | **§ 16. Иррациональные уравнения и неравенства (6 ч)** | |
| 109, 110 | Решение иррациональных уравнений (п. 41) | 2 ч |
| 111, 112 | Решение иррациональных неравенств (п. 42) | 2 ч |
| 113 | Решение дополнительных упражнений к главе 5 | 1 ч |
| 114 | *Контрольная работа № 5* | 1 ч |
| | **Глава 6. Тригонометрические функции и их свойства (27 ч)** | |
| | **§ 17. Тригонометрические функции (5 ч)** | |
| 115 | Угол поворота (п. 43) | 1 ч |
| 116 | Измерение углов поворота в радианах (п. 44) | 1 ч |

*Продолжение таблицы*

| № урока | Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|---|---|
| 117, 118 | Определение тригонометрических функций (п. 45) | 2 ч |
| 119 | *Самостоятельная работа № 18* | 1 ч |
| | **§ 18. Свойства и графики тригонометрических функций** (5 ч) | |
| 120 | Некоторые тригонометрические тождества (п. 46) | 1 ч |
| 121 | Свойства тригонометрических функций (п. 47) | 1 ч |
| 122 | Графики и основные свойства синуса и косинуса (п. 48) | 1 ч |
| 123 | Графики и основные свойства тангенса и котангенса (п. 49) | 1 ч |
| 124 | *Самостоятельная работа № 19* | 1 ч |
| | **§ 19. Основные тригонометрические формулы** (8 ч) | |
| 125, 126 | Формулы приведения (п. 50) | 2 ч |
| 127 | Решение простейших тригонометрических уравнений (п. 51) | 1 ч |
| 128, 129 | Связь между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента (п. 52) | 2 ч |
| 130, 131 | Преобразование тригонометрических выражений (п. 53) | 2 ч |
| 132 | *Самостоятельная работа № 20* | 1 ч |
| | **§ 20. Формулы сложения и их следствия** (9 ч) | |
| 133, 134 | Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов (п. 54) | 2 ч |
| 135, 136 | Формулы двойного и половинного углов (п. 55) | 2 ч |
| 137, 138 | Формулы суммы и разности тригонометрических функций (п. 56) | 2 ч |
| 139 | *Самостоятельная работа № 21* | 1 ч |
| 140 | Решение дополнительных упражнений к главе 6 | 1 ч |
| 141 | *Контрольная работа № 6* | 1 ч |
| | **Глава 7. Элементы комбинаторики и теории вероятностей** (16 ч) | |
| | **§ 21. Основные понятия и формулы комбинаторики** (7 ч) | |
| 142, 143 | Перестановки (п. 57) | 2 ч |
| 144, 145 | Размещения (п. 58) | 2 ч |
| 146, 147 | Сочетания (п. 59) | 2 ч |
| 148 | *Самостоятельная работа № 22* | 1 ч |

*Окончание таблицы*

| № урока | Изучаемый материал | Кол-во часов |
|---|---|---|
| | **§ 22. Элементы теории вероятностей (9 ч)** | |
| 149, 150 | Частота и вероятность (п. 60) | 2 ч |
| 151, 152 | Сложение вероятностей (п. 61) | 2 ч |
| 153, 154 | Умножение вероятностей (п. 62) | 2 ч |
| 155 | *Самостоятельная работа № 23* | 1 ч |
| 156 | Решение дополнительных упражнений к главе 7 | 1 ч |
| 157 | *Контрольная работа № 7* | 1 ч |
| | **Итоговое повторение (13 ч)** | |

Авторы с благодарностью воспримут все замечания и предложения по усовершенствованию содержания учебника, которые можно отправить или в издательство «Мнемозина» или непосредственно одному из авторов по электронной почте:

feoktistov_ie@rambler.ru.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Глава 4
## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ



## Глава 5
## СТЕПЕНИ И КОРНИ

## Глава 6

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА



## Глава 7

## ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное издание

**Макарычев** Юрий Николаевич,
**Миндюк** Нора Григорьевна,
**Нешков** Константин Иванович,
**Феоктистов** Илья Евгеньевич

**АЛГЕБРА**
**9 класс**

**УЧЕБНИК**
**для учащихся общеобразовательных учреждений**

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление
и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *Л. В. Аввакумова, И. Н. Баханова*
Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001625.02.08 от 29.02.2008.

Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная»
Печать офсетная. Усл. печ. л. 28,0
Тираж 25 000 экз. Заказ № 5180

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 367-54-18, 367-56-27, 367-67-81; факс: (495) 165-92-18.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина» (розничная и мелкооптовая продажа книг).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 783-82-84, 783-82-85, 783-82-86.

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: (495) 657-98-98 (многоканальный).
E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика в ОАО «ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14